Épületszerkezetek Transzportfolyamatainak modellezése 2:

HAM (Heat Air Moisture) egyenletek numerikus megoldása Véges térfogat (FVM) módszerrel

Bakonyi Dániel
okl. építészmérnök, tanársegéd
BME Épületszerkezettani Tanszék

1 Rövid történeti áttekintés

A HAM (Heat Air Moisture) számítások a 90-es évek eleje óta terjedtek el az épületfizikai gyakorlatban. Nagyszámú publikáció, modell és számítógépes program született már a témakörben. Az egyes szerzők modelljei kisebb nagyobb mértékben eltérnek egymástól, de mindegyik lényege, hogy a hővezetés, nedvességvezetés és a légáramlás egymással csatolt differenciálegyenleteit oldja meg valamilyen opak térelhatároló szerkezetben valós klímaadatok, a valóságot jól modellező belső peremfeltételek és a korábbi számításoknál jóval részletesebb anyagtulajdonságok segítségével.

Az elkészített program célja Künzel [1] doktori disszertációjában leírt HAM modell implementációja és az ő általa megalkotott WUFI nevű azonos célú kereskedelmi (és ennek megfelelően nem nyílt forráskódú) software klónjának az elkészítése.

2 Elméleti háttér

A megvalósított program a következő fizikai modellekre épül:

2.1 Hőtranszport

A hővezetés egyenlete a szilárd építőanyagok pórusszerkezetében tárolt nedvességtartalom hőkapacitásával és a nedvességtartalom függő hővezetési tényezővel van kiegészítve.

$$\frac{dH}{dt} = \left(\rho_{dry} c_{dry} + w c_w\right)\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_x\left(w\right)\frac{\partial T}{\partial x}\right) + Q_T \tag{1}$$

ahol:
- H [J/m³] – entalpia
- t [s] – idő
- ρ_{dry} [kg/m³] – a száraz építőanyag sűrűsége
- c_{dry} [J/kgK] – a száraz építőanyag fajhője
- w [kg/m³] – a nedvességtartalom
- c_w [J/kgK] – a víz fajhője
- T [K] – hőmérséklet
- $\lambda_x(w)$ [W/mK] – az x irányú nedvességtartalom függő hővezetési tényező
- Q_T [W/m³] – hőforrás

A hőtechnikai peremfeltétel:

$$q_n = h_{surf}\frac{\partial T}{\partial n} = h_{surf}\left(T_{BC} - T_{surf}\right) = \frac{1}{R_{surf}}\left(T_{BC} - T_{surf}\right) \tag{2}$$

ahol:
- q_n [W/m²] – hőáramsűrűség a felületre merőlegesen
- h_{surf} [W/m²K] – felületi hőátadási tényező
- T_{BC} [K] – a végtelen távoli pont hőmérséklete (léghőmérséklet)
- T_{surf} [K] – a felületi hőmérséklet
- R_{surf} [m²K/W] – a felületi hőátadási ellenállás

2.2 Nedvességtranszport

A szilárd építőanyagokban működő nedvességtranszport mechanizmusok közül a parciális páranyomás gradiens által hajtott páradiffúzió és a kapilláris nedvességtranszport van figyelembe véve.

A páradiffúziós nedvességáram:

$$g_v = -\frac{\delta_0}{\mu} \cdot \nabla p = -\frac{\delta_0}{\mu} \cdot \nabla \varphi \cdot p_{sat} \qquad (3)$$

ahol:
- g_v [kg/m²s] – páradiffúziós nedvességáram
- δ_0 [s] v. [kg/msPa] – a vízgőz permeabilitás – v. diffúziós tényező a nyugvó levegőben
- μ [-] – a páradiffúziós ellenállási szám
- $grad(p)$ [Pa] – a parciális páranyomás gradiens
- φ [-] – a relatív páratartalom
- p_{sat} [Pa] – a telítési páranyomás

A diffúziós tényező közelítő értéke a hőmérséklettől és a légköri nyomástól függ:

$$\delta_0 = 2 \cdot 10^{-7} \cdot T^{0.81} / P_a \qquad (4)$$

ahol:
- δ_0 [s] v. [kg/msPa] – a vízgőz permeabilitás – v. diffúziós tényező a nyugvó levegőben
- T [K] – abszolút hőmérséklet
- P_a [Pa] – légköri nyomás

A páradiffúziós ellenállási szám pedig az adott építőanyagra jellemző anyagjellemző, és megmutatja, hogy az adott közeg mekkora páradiffúziós ellenállást jelent a nyugvó levegőhöz képest:

$$\mu = \frac{\delta_0}{\delta} \qquad (5)$$

ahol:
- μ [-] – a páradiffúziós ellenállási szám
- δ_0 [s] v. [kg/msPa] – a vízgőz permeabilitás – v. diffúziós tényező a nyugvó levegőben
- δ [s] v. [kg/msPa] – a vízgőz permeabilitás – v. diffúziós tényező az adott anyagban

A kapilláris nedvességáram számítására számod modell létezik. A program a Kirscher féle [2] nedvességvezetés egyenletet használja, melyet egy párhuzamosan kapcsolt kapillárisokra (kör keresztmetszet) alapuló kapillármodell alapján vezetett le, és a nedvességtartalmat veszi a meghajtó potenciálnak:

$$g_c = -D_w(w)\frac{dw}{dx} \qquad (6)$$

ahol:
- g_c [kg/m²s] – a kapilláris nedvességáram
- D_w [m²/s] – a folyadéktranszport együttható
- w [kg/m³] – a nedvességtartalom

Hogy a páradiffúziós és a kapilláris nedvességtranszportot egy egyenletben lehessen kifejezni mindkettőt egy azonos potenciál függvényében kell felírni. Ez a potenciál a relatív nedvességtartalom. A (3) egyenletben ezért van a páraáram a parciális páranyomás helyett a telítési páranyomás és a relatív páratartalom függvényében kifejezve. A kapilláris nedvességvezetésnél ez az átalakítás a következő képpen végezhető el (Künzel alapján [x]):

$$g_c = -D_w(w)\frac{dw}{dx} = -D_w(w)\frac{dw}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dx} = -D_\varphi(w)\frac{d\varphi}{dx} \tag{7}$$

ahol: g_c [kg/m²s] – a kapilláris nedvességáram
D_w [m²/s] – a folyadéktranszport együttható
D_φ [kg/ms] – a folyadékvezetési együttható
w [kg/m³] – a nedvességtartalom
φ [-] – a relatív páratartalom

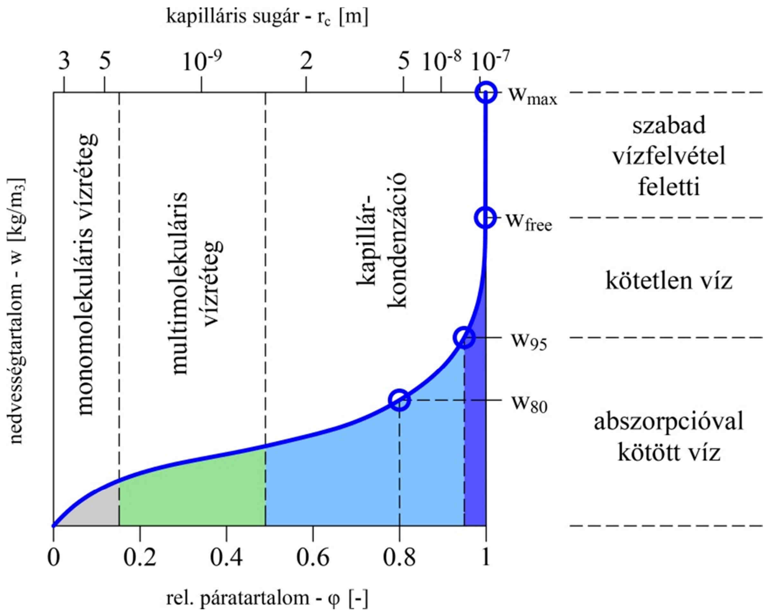
Tehát:

$$D_\varphi = -D_w\frac{dw}{d\varphi} \tag{8}$$

Összefoglalva az eddigieket a nedvességtranszport egyenlete a következő alakot veszi fel:

$$\frac{dw}{dt} = \nabla\left(g_v + g_c\right) + Q_M \tag{9}$$

Az egyenlet baloldalát (a nedvességtartalom megváltozását) is a relatív nedvességtartalom függvényében kell kifejezni. Ehhez az adott építőanyag ún. nedvességtartalom függvényét lehet felhasználni, mely a relatív nedvességtartalom és azon a relatív nedvességtartalmon az anyagban kialakuló egyensúlyi nedvességtartalom között teremt kapcsolatot:



Ennek a $w=f(\varphi)$ függvénynek az adott pontban vett meredekségéből képezhetjük a hőkapacitás mintájára az ún. nedvességkapacitást:

$$\xi = \frac{dw}{d\varphi} \tag{10}$$

ahol: ξ [kg/m³] – a nedvességkapacitás
w [kg/m³] – a nedvességtartalom
φ [-] – a relatív páratartalom

Így a nedvességvezetés egyenletének általános formája (1D-ben):

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{d\varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\delta_0(T)}{\mu(w)} \cdot \frac{\partial \varphi \cdot p_{sat}(T)}{\partial x} + D_w \frac{\partial w}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + Q_M \tag{11}$$

ahol:
- w [kg/m³] – nedvességtartalom
- t [s] – idő
- φ [-] – a relatív páratartalom
- δ_0 [s] v. [kg/msPa] – a vízgőz permeabilitás – v. diffúziós tényező a nyugvó levegőben
- $\mu(w)$ [-] – a nedvességtartalom függő páradiffúziós ellenállási szám
- p_{sat} [Pa] – a telítési parciális páranyomás
- D_w [m²/s] – a folyadékvezetési együttható
- Q_M [kg/m³s] – nedvességforrás

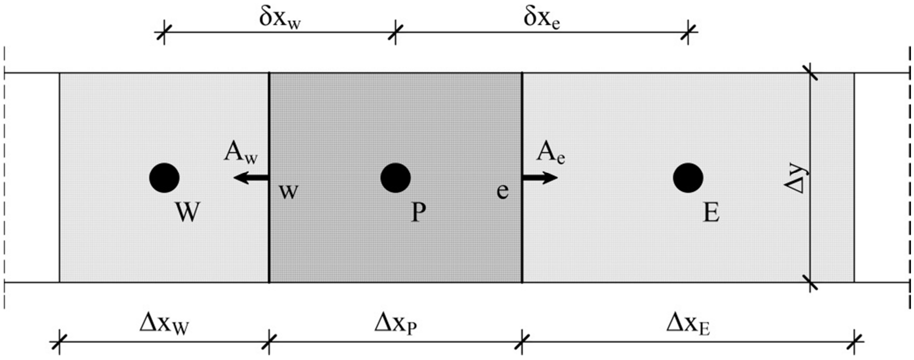
A nedvességtechnikai peremfeltételeknél egyelőre csak a páradiffúzió van figyelembe véve:

$$g_{v,n} = \beta_v (p_s - p_\infty) = \beta_v (\varphi_s p_{sat.s} - \varphi_\infty p_{sat,\infty}) \tag{12}$$

ahol:
- $g_{v,n}$ [kg/m²s] – a páradiffúziós áramsűrűség a felületre merőlegesen
- β_v [kg/m²sPa] – a felületi páradiffúziós tényező
- p [Pa] – a parciális páranyomás
- p_{sat} [Pa] – a telítési páranyomás
- φ [-] – a relatív páratartalom

3 Az egyenletrendszer numerikus megoldása

A program a véges térfogat módszert használja az egyenletrendszer megoldására. A numerikus séma az egyszerűség kedvéért 1D-ben kerül bemutatásra. A véges térfogat háló jelöléseit a következő ábra mutatja be:



Az hőmérséklet, relatív nedvességtartalom és nedvességtartalom értékeket valamint az egyes anyagtulajdonságokat a cella középpontokban tároljuk.

3.1 A hővezetés egyenletének megoldása

A hővezetés differenciaegyenlete:

$$\frac{dH}{dt} = \left(\rho_{dry} c_{dry} + w c_w\right) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_x(w) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + Q_T \tag{13}$$

Az egyenlet integrálva egy véges térfogatra és egy véges időlépésre:

$$\int\limits_{\Delta t}\int\limits_{\Delta V}\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_{dry}c_{dry}+wc_w\right)TdVdt=\int\limits_{\Delta t}\int\limits_{\Delta V}\frac{\partial}{\partial_x}\left(\lambda_x\left(w\right)\frac{\partial T}{\partial x}\right)dVdt+\int\limits_{\Delta t}\int\limits_{\Delta V}Q_T dVdt \tag{14}$$

$$\begin{aligned}&\int\limits_{\Delta V}\left(\left(\left(\rho_{dry}c_{dry}+wc_w\right)T\right)^{n+1}-\left(\left(\rho_{dry}c_{dry}+wc_w\right)T\right)^{n}\right)dV=\\&=\int\limits_{\Delta t}\int\limits_{\Delta V}\frac{\partial}{\partial_x}\left(\lambda_x\left(w\right)\frac{\partial T}{\partial x}\right)dVdt+\int\limits_{\Delta t}\int\limits_{\Delta V}Q_T dVdt\end{aligned} \tag{15}$$

Feltételezve, hogy:

$$\int\limits_{\Delta V}\frac{\partial}{\partial t}\left(\left(\rho_{dry}c_{dry}+wc_w\right)T\right)dV=\left(\left(\rho_{dry}c_{dry}+wc_w\right)T\right)_i\Delta V \tag{16}$$

Az instacioner tag átírható a következő formában:

$$\left(\left(\left(\rho_{dry}c_{dry}+wc_w\right)T\right)_i^{n+1}-\left(\left(\rho_{dry}c_{dry}+wc_w\right)T\right)_i^{n}\right)\Delta V \tag{17}$$

Továbblépve a hőáram tagra, feltételezve, hogy a hőáramsűrűség leírható a véges térfogati elem felületi lapjainak középpontjaiban vett értékével:

$$\int\limits_{\Delta t}\int\limits_{\Delta V}\frac{\partial}{\partial_x}\left(\lambda_x\left(w\right)\frac{\partial T}{\partial x}\right)dVdt=\int\limits_{\Delta t}\sum_{f=e,w}q_f A_f dt \tag{18}$$

Most valamilyen profil feltételezéssel kell élnünk azzal kapcsolatban, hogy a hőáramsűrűség hogyan változik két időlépés között. Tételezzük föl, hogy egy nulla és egy közötti f interpolációs tényezővel interpolálhatunk:

$$\int\limits_{\Delta t}qAdt=\left(fq^{n+1}A+(1-f)q^nA\right)\Delta t \tag{19}$$

T változására két véges térfogat elem középpontja között lineáris profil feltételezéssel élve:

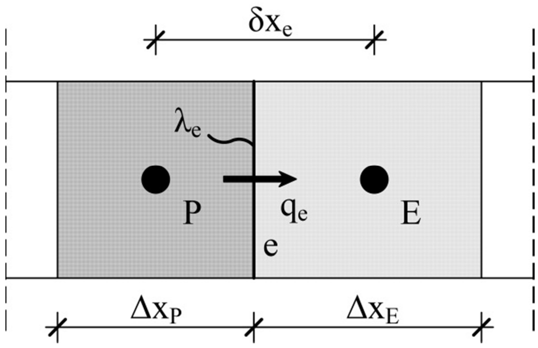
$$q_e^{n+1}A_e=-\lambda_x\left(w\right)\Delta y\Delta z\frac{T_E^{n+1}-T_P^{n+1}}{\left(\delta_x\right)_e} \tag{20}$$

$$q_w^{n+1}A_w=\lambda_w\left(w\right)\Delta y\Delta z\frac{T_P^{n+1}-T_W^{n+1}}{\left(\delta_x\right)_w} \tag{21}$$

$$q_e^{n}A_e=-\lambda_x\left(w\right)\Delta y\Delta z\frac{T_E^{n}-T_P^{n}}{\left(\delta_x\right)_e} \tag{22}$$

$$q_w^{n}A_w=\lambda_w\left(w\right)\Delta y\Delta z\frac{T_P^{n}-T_W^{n}}{\left(\delta_x\right)_w} \tag{23}$$

A hőáramokat a cella felületein (e és w) számítjuk, de a keresett érték (hőmérséklet) mellett az anyagtulajdonságokat is a cella középpontokban tároljuk, ezért ha a hővezetési tényező nem konstans (pl. eltérő anyagok), akkor interpolálni kell azt két-két cella között a határfelületre.



A lineáris interpolálás csak akkor kielégítő, ha λ valóban közel egyenletesen változik két cella középpont között. Ha nagyobb ugrások is várhatóak (pl. egy szilárd test – folyadék határon), akkor jobb közelítés a harmonikus közép interpoláció:

$$\lambda_e = \left(\frac{1-f_e}{\lambda_P} + \frac{f_e}{\lambda_E} \right)^{-1} \tag{24}$$

A forrás tag integrálásánál először is a térfogat szerinti integrálnál a cella középpontban kapott (átlag) tekintjük érvényesnek az egész cellára. Majd az időbeni integrálásnál hasonlóan járunk el, mint a hőáramoknál:

$$\int_{\Delta t}\int_{\Delta V} Q_T dV dt = \int_{\Delta t} \overline{Q_T} \Delta V dt = f\,\overline{Q_T}^{\,n+1} \Delta V \Delta t + (1-f)\overline{Q_T}^{\,n} \Delta V \Delta t \tag{25}$$

Az eddigieket összefoglalva a következő lineáris egyenletrendszert kapjuk:

$$a_{P0}\left(T_P^{n+1} - T_P^n\right) = \sum_{j=E,W} \left(f a_j^{n+1} T_j^{n+1} + (1-f) a_j^n T_j^n \right) - f \sum_{j=E,W} a_j^{n+1} T_P^{n+1} - (1-f) \sum_{j=E,W} a_j^n T_P^n$$

Implicit séma esetén *f=1*:

$$\begin{aligned} a_{P0}\left(T_P^{n+1} - T_P^n\right) &= \sum_{j=E,W} a_j^{n+1} T_j^{n+1} - \sum_{j=E,W} a_j^{n+1} T_P^{n+1} + b \\ a_{P0} T_P^n &= -\sum_{j=E,W} a_j^{n+1} T_j^{n+1} + \left(a_{P0} + \sum_{j=E,W} a_P^{n+1} \right) T_P^{n+1} - b \end{aligned} \tag{26}$$

ahol:

$$\begin{aligned} a_E^{n+1} &= \frac{\lambda_e \Delta y \Delta z}{\left(\delta_x\right)_e} \\ a_W^{n+1} &= \frac{\lambda_w \Delta y \Delta z}{\left(\delta_x\right)_w} \\ a_{P0} &= \frac{\left(\rho_{dry} c_{dry} + w c_w\right) \Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta t} \\ a_P^{n+1} &= \sum_{j=E,W} a_j^{n+1} + a_{P0}^n \\ b &= Q_T \Delta V \end{aligned} \tag{27}$$

Mátrix formában:

$$\begin{bmatrix} \ddots & & & & & \\ -a_{W,j-1} & a_{P,j-1} & -a_{E,j-1} & & & \\ & -a_{W,j} & a_{P,j} & -a_{E,j} & & \\ & & -a_{W,j+1} & a_{P,j+1} & -a_{E,j+1} & \\ & & & & \ddots & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vdots \\ T_{j-1}^{n+1} \\ T_{j}^{n+1} \\ T_{j+1}^{n+1} \\ \vdots \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \vdots \\ b_{j-1} \\ b_{l} \\ b_{j+1} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ a_{P0,j-1} \\ a_{P0,j} \\ a_{P0,j+1} \\ \vdots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vdots \\ T_{j-1}^{n} \\ T_{j}^{n} \\ T_{j+1}^{n} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

3.2 A nedvességvezetés egyenletének megoldása

A nedvességvezetés differenciaegyenlete:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{d\varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\delta_0(T)}{\mu(w)} \cdot \frac{\partial \varphi \cdot p_{sat}(T)}{\partial x} + D_w \frac{\partial w}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + Q_M \tag{28}$$

Az egyenlet integrálva egy véges térfogatra és egy időlépésre:

$$\begin{aligned} &\int_{\Delta t}\int_{\Delta V} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{dw}{d\varphi}\varphi \right) dVdt = \\ &= \int_{\Delta t}\int_{\Delta V} \frac{\partial}{\partial_x}\left(\frac{\delta_0(T)\, p_{sat}(T)}{\mu(w)} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + D_w \frac{\partial w}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dVdt + \int_{\Delta t}\int_{\Delta V} Q_M\, dVdt \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned} &\int_{\Delta V}\left(\left(\frac{dw}{d\varphi}\varphi \right)^{n+1} - \left(\frac{dw}{d\varphi}\varphi \right)^{n} \right) dV = \\ &= \int_{\Delta t}\int_{\Delta V} \frac{\partial}{\partial_x}\left(\frac{\delta_0(T)\, p_{sat}(T)}{\mu(w)} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + D_w \frac{\partial w}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dVdt + \int_{\Delta t}\int_{\Delta V} Q_M\, dVdt \end{aligned} \tag{30}$$

Feltételezve, hogy:

$$\int_{\Delta V} \frac{dw}{d\varphi}\varphi dV = \left(\frac{dw}{d\varphi}\varphi \right)_j \Delta V \tag{31}$$

Továbblépve a nedvességáram tagra, feltételezve, hogy a nedvességáram leírható a véges térfogati elem felületi lapjainak középpontjaiban vett értékével:

$$\int_{\Delta t}\int_{\Delta V} \frac{\partial}{\partial_x}\left(\frac{\delta_0(T)\, p_{sat}(T)}{\mu(w)} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + D_w \frac{\partial w}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dVdt = \int_{\Delta t} \sum_{f=e,w} (q_v + q_c) A_f\, dt \tag{32}$$

Most valamilyen profil feltételezéssel kell élnünk azzal kapcsolatban, hogy a nedvességáram hogyan változik két időlépés között. Tételezzük föl, hogy egy nulla és egy közötti f interpolációs tényezővel interpolálhatunk:

$$\int_{\Delta t} (q_v + q_c) A dt = \left(f\,(q_v + q_c)^{n+1} A + (1-f)(q_v + q_c)^n A \right) \Delta t \tag{33}$$

Implicit séma esetén *f=1*:

$$a_P\left(\varphi_P^{n+1}-\varphi_P^n\right)=\sum_{j=E,W}a_j^{n+1}\varphi_j^{n+1}-\sum_{j=E,W}a_j^{n+1}\varphi_P^{n+1}+b$$
$$a_P^n\varphi_P^n=-\sum_{j=E,W}a_j^{n+1}\varphi_j^{n+1}+\left(a_P^n+\sum_{j=E,W}a_P^{n+1}\right)\varphi_P^{n+1}-b \tag{34}$$

ahol:

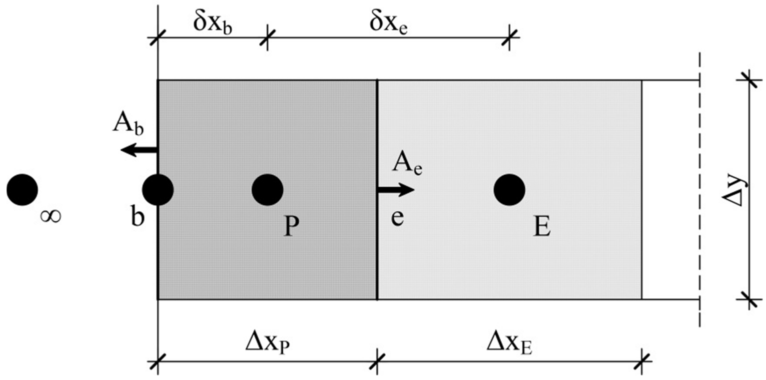
$$a_E^{n+1}=\left(p_{sat,E}\frac{\delta_{0,e}}{\mu_e}+D_{\varphi,e}\right)\frac{\Delta y\Delta z}{(\delta_x)_e}$$
$$a_W^{n+1}=\left(p_{sat,W}\frac{\delta_{0,w}}{\mu_w}+D_{\varphi,w}\right)\frac{\Delta y\Delta z}{(\delta_x)_e}$$
$$a_P^{n+1}=\begin{cases}\left(p_{sat,P}\frac{\delta_{0,e}}{\mu_e}+D_{\varphi,e}\right)\frac{\Delta y\Delta z}{(\delta_x)_e}\\+\left(p_{sat,P}\frac{\delta_{0,w}}{\mu_w}+D_{\varphi,w}\right)\frac{\Delta y\Delta z}{(\delta_x)_w}\end{cases} \tag{35}$$
$$a_{P0}^n=\frac{\frac{dw}{d\varphi}\Delta x\Delta y\Delta z}{\Delta t}$$
$$b=Q_M\Delta V$$

Mátrix formában:

$$\begin{bmatrix}\ddots&&&&\\-a_{W,j-1}&a_{P,j-1}&-a_{E,j-1}&&\\&-a_{W,j}&a_{P,j}&-a_{E,j}&\\&&-a_{W,j+1}&a_{P,j+1}&-a_{E,j+1}\\&&&&\ddots\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\vdots\\\varphi_{j-1}^{n+1}\\\varphi_j^{n+1}\\\varphi_{j+1}^{n+1}\\\vdots\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\vdots\\b_{j-1}\\b_l\\b_{j+1}\\\vdots\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\vdots\\a_{P0,j-1}\\a_{P0,j}\\a_{P0,j+1}\\\vdots\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\vdots\\\varphi_{j-1}^n\\\varphi_j^n\\\varphi_{j+1}^n\\\vdots\end{bmatrix}$$

3.3 A peremfeltételek implementációja

A következő ábra tipikus peremfeltételi szituációt mutat (perem keleti irányból). Azt a cellát, melynek egy vagy több felülete a peremen van, peremcellának nevezzük. A keresett értékeket továbbra is a cellák középpontjaiban tároljuk, de itt a peremfelület középpontjában is: b. A végtelen távoli pontot (pl. környező levegő egy falnál) egy virtuális cella középpontnak tekinthetjük a hálón, és ∞ –el jelöljük.



Dirichlet peremfeltétel implementációja:

$$T_b = T_{b,előírt} \tag{36}$$

$$\varphi_b = \varphi_{b,előírt} \tag{37}$$

Neumann peremfeltétel implementációja:

$$q_b = q_{b,előírt}$$
$$a_{P0}\left(T_P^{n+1} - T_P^n\right) = a_e^{n+1} T_E^{n+1} - a_e^{n+1} T_P^{n+1} + q_{b,előírt} \tag{38}$$

Vegyes peremfeltétel hővezetésnél:

$$\lambda_x \frac{\left(T_P - T_b\right)}{\delta x_b} = -h_b\left(T_\infty - T_b\right) \tag{39}$$

T_b egy új ismeretlent jelentene, ezért ki kell ejteni. Először fejezzük ki:

$$T_b = \frac{h_b T_\infty + \left(\lambda_x / \delta x_b\right) T_P}{h_b + \left(\lambda_x / \delta x_b\right)} \tag{40}$$

A T_b –re kapott egyenlet segítségével kiejthetjük azt a (x) egyenletből a következő segédmennyiség felhasználásával (T_b-t behelyettesítve (x)-be és átrendezve azt levezethető):

$$R_{eq} = \frac{h_b\left(\lambda_x / \delta x_b\right)}{h_b + \left(\lambda_x / \delta x_b\right)} \tag{41}$$

A végeredményül kapott egyenlet (a teljesen implicit séma példáján keresztül):

$$a_{P0}\left(T_P^{n+1} - T_P^n\right) = a_w^{n+1} T_W^{n+1} + R_{eq}\Delta y T_\infty^{n+1} - (a_w^{n+1} + R_{eq}\Delta y) T_P^{n+1} \tag{42}$$

Vegyes peremfeltétel nedvességvezetésnél (az előzővel teljesen analóg módon):

$$\varphi_b = \frac{\beta_b \varphi_\infty p_{sat}\left(T_\infty\right) + \left(\dfrac{\delta_b p_{sat}\left(T_P\right) + D_{fi,b}}{\delta x_b}\right)\varphi_P}{\beta_b p_{sat}\left(T_b\right) + \dfrac{\delta_b p_{sat}\left(T_b\right) + D_{fi,b}}{\delta x_b}} \tag{43}$$

$$R_{eq,\varphi} = \frac{\beta_b \left(\dfrac{\delta_b p_{sat}(T_b) + D_{fi,b}}{\delta x_b} \right)}{\beta_b p_{sat}(T_b) + \dfrac{\delta_b p_{sat}(T_b) + D_{fi,b}}{\delta x_b}} \tag{44}$$

$$-\left(\left(\delta_b + D_{fi,b} \right) \nabla \varphi \right)_b i = R_{eq,\varphi} \left(\varphi_\infty p_{sat}(T_\infty) - \varphi_P p_{sat}(T_b) \right) \tag{45}$$

3.4 A numerikus séma tulajdonságai

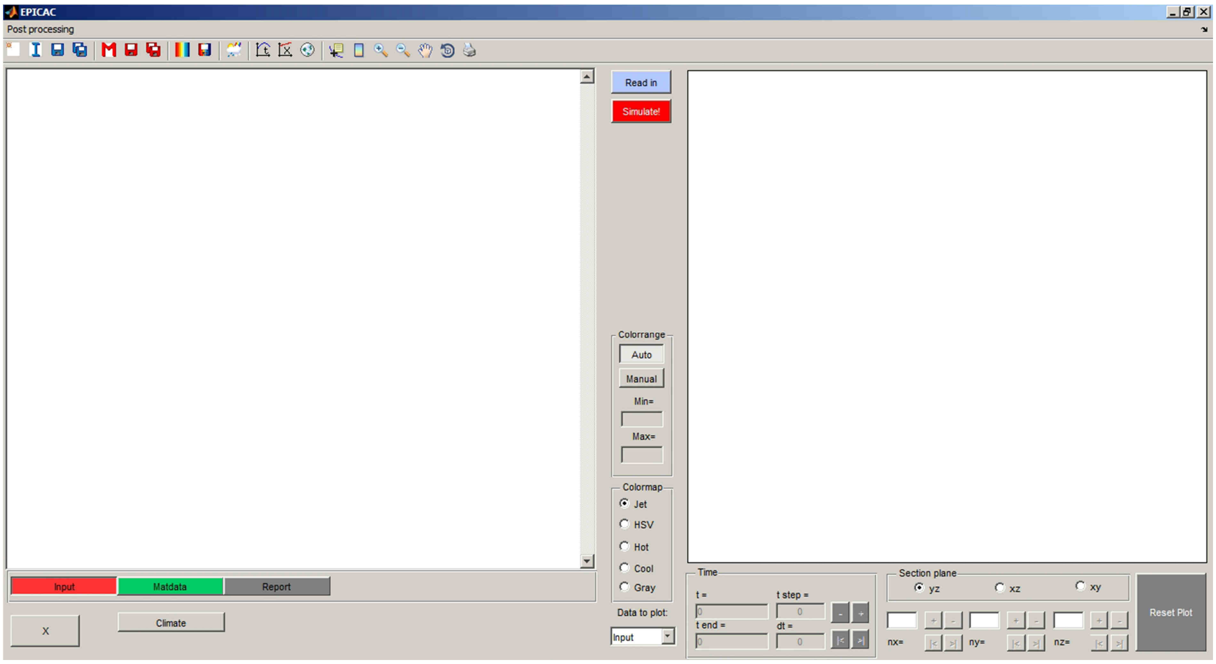
A numerikus séma levezetése közben a következő egyszerűsítésekkel éltünk:

- A hő- és nedvességáramokat a cella falak középpontjaiban vett értékükkel jellemeztük
- A hő- és nedvességforrásokat a cellák középpontjaiban vett átlagértékükkel jellemeztük
- A gradiensek számításánál azt tételeztük fel, hogy T és φ lineárisan változik az egyes cellák középpontjai között
- Az egyenletek időfüggő (bal) oldalán a cella középpontokban vett T és φ értékekkel, mint átlagértékekkel jellemeztük az egész cellát

[3] alapján levezethető, hogy mind a középérték, mind a gradiens közelítése $O((\Delta x)^2)$ pontos, az időfüggő oldal közelítése azonban csak $O(\Delta t)$ pontos. Stabilitás vizsgálattal megállapítható, hogy az implicit séma bármilyen Δx és Δt-re stabil.

A számítások során az időlépést alapvetően a rendelkezésre álló klímaadatok időbeni felbontása alapján kell felvenni (ez általában 1 [h]). Mivel a legtöbb hő- és nedvességtechnikai jelenség erős napi ciklusosságot mutat, egy óránál nagyobb időlépést a gyakorlatban nem érdemes felvenni.

4 A MATLAB program rövid bemutatása



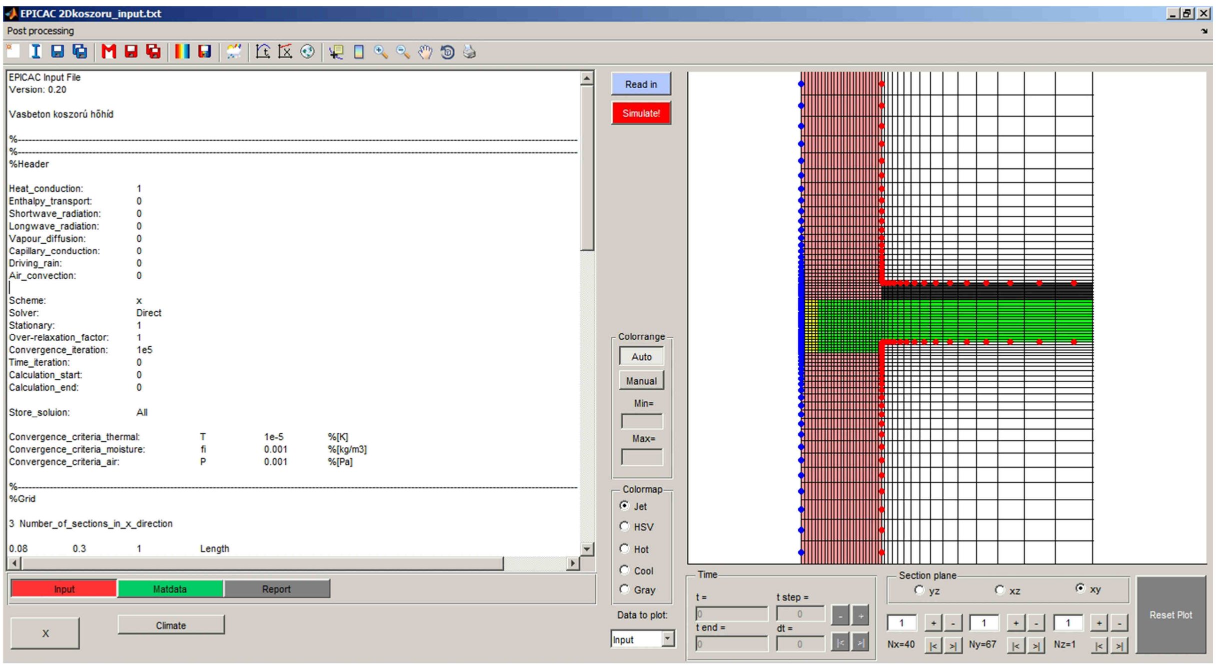
A program egy grafikus felhasználói felület segítségével használható (GUI). Egy számításhoz be kell olvasni vagy kézzel beírni a bal oldali mezőbe egy txt formátumú input file-t. Az input file határozza meg, hogy stacioner vagy instacioner számítást akarunk, milyen fizikai modellel dolgozzon a program (csak hővezetés vagy hő és nedvességvezetés, nedvességvezetésnél csak páradiffúzió, vagy páradiffúzió és kapilláris nedvességvezetés is, van-e szoláris hőnyereség, stb.). Szintén az input file elején kell meghatározni a többi lényeges számítási paramétert (max. iterációk száma, szimuláció hossza az időben és az időlépés), konvergencia kritériumok, milyen sémával dolgozzon a megoldó program, stb.

Az input file írja le a geometriai hálót és ennek továbbosztásával a numerikus hálót. A geometriai háló egyes tartományához kell hozzárendelni az egyes anyagokat egy ID-vel és a hőmérséklet és relatív páratartalom kezdeti feltételekkel. Definiálni kell a peremfeltételeket, melyek vegyes peremfeltételek lehetnek különféle módon megadva. Az egyes peremfeltétel definíciókat azután hozzá kell rendelni a geometriai háló egyes felületeihez. Végül különböző belső hő- és nedvességforrásokat is lehet definiálni és hozzárendelni a numerikus háló egyes részeihez.

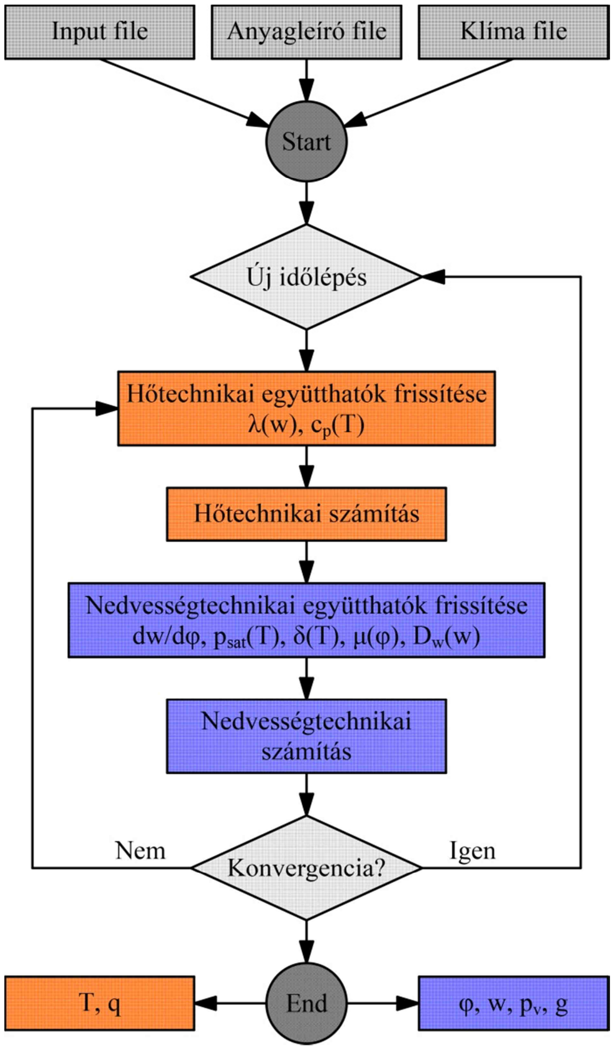
Az anyagtulajdonságok leírására egy anyagleíró txt file-t kell beolvasni vagy beírni. Ez tartalmazhat csak hőtechnikai számításokra és nedvességtechnikai számításokra is alkalmas anyagokat is, melyeknek meg kell felelnie az input file-ban megadott anyag ID-knek.

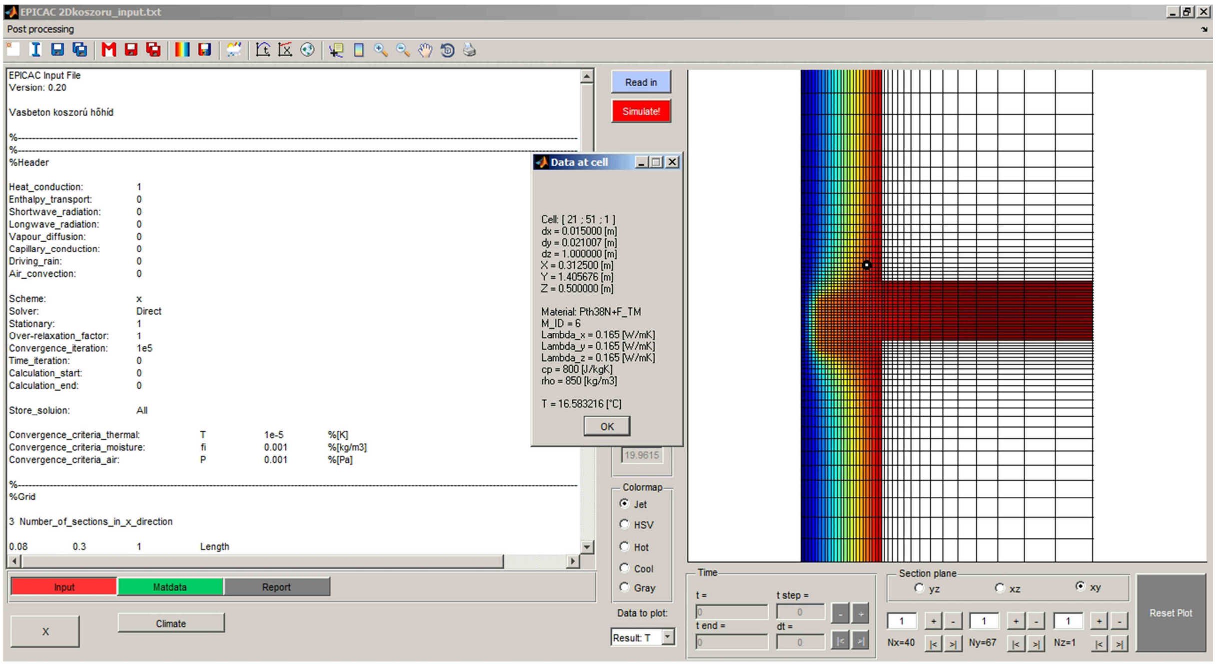
Amennyiben egy olyan peremfeltételt definiálunk, melyik egy klíma file-ra hivatkozik, a klíma file-nak (szintén egy txt) meg kell lennie a számítógépen a z input file-ban megadott elérési úton.

Miután végeztünk az input megadásával a „Read In" gombra kattintva a GUI beolvassa az input és anyagleíró file-ok tartalmát és elküldi azokat a **fun_interpreter.m** függvénynek. Az értelmezi azokat, jelez, ha esetlegesen valamilyen hiba van és végül vektor, ill. mátrix formában összefoglalva visszaadja az számításhoz szükséges összes adatot (numerikus háló, anyagok, indexek, peremfeltételek, stb.). Ezekből a GUI létrehoz egy **FVMconstruction** objektumot mely majd a számítást magát el fogja végezni, és az eredményeket tárolni fogja. A GUI továbbá megjeleníta a jobb oldali ablakban az input geometriai reprezentációját.



Magát a számítást a „Simulate" gombra kattintva lehet elindítani (meghívja az FVMconstruction objektum calculate method-ját). Egy HAM szimuláció esetén a számítás menete a következő:


Input file
Anyagleíró file
Klíma file
Start
Új időlépés
Hőtechnikai együtthatók frissítése
λ(w), c_p(T)
Hőtechnikai számítás
Nedvességtechnikai együtthatók frissítése
dw/dφ, p_sat(T), δ(T), μ(φ), D_w(w)
Nedvességtechnikai számítás
Nem
Konvergencia?
Igen
End
T, q
φ, w, p_v, g


EPICAC 2Dkoszoru_input.txt
Post processing
EPICAC Input File
Version: 0.20
Vasbeton koszorú hőhíd
%Header
Heat_conduction: 1
Enthalpy_transport: 0
Shortwave_radiation: 0
Longwave_radiation: 0
Vapour_diffusion: 0
Capillary_conduction: 0
Driving_rain: 0
Air_convection: 0
Scheme: x
Solver: Direct
Stationary: 1
Over-relaxation_factor: 1
Convergence_iteration: 1e5
Time_iteration: 0
Calculation_start: 0
Calculation_end: 0
Store_soluion: All
Convergence_criteria_thermal: T 1e-5 %[K]
Convergence_criteria_moisture: fi 0.001 %[kg/m3]
Convergence_criteria_air: P 0.001 %[Pa]
%Grid
3 Number_of_sections_in_x_direction
0.08 0.3 1 Length
Input
Matdata
Report
X
Climate
Read in
Simulate!
Data at cell
Cell: [21 ; 51 ; 1]
dx = 0.015000 [m]
dy = 0.021007 [m]
dz = 1.000000 [m]
X = 0.312500 [m]
Y = 1.405676 [m]
Z = 0.500000 [m]
Material: Pth38N+F_TM
M_ID = 6
Lambda_x = 0.165 [W/mK]
Lambda_y = 0.165 [W/mK]
Lambda_z = 0.165 [W/mK]
cp = 800 [J/kgK]
rho = 850 [kg/m3]
T = 16.583216 [°C]
OK
Colormap
Jet
HSV
Hot
Cool
Gray
Data to plot:
Result: T
Time
t =
t step =
t end =
dt =
Section plane
yz
xz
xy
Nx=40
Ny=67
Nz=1
Reset Plot

5 A program validálása

5.1 MSZ EN 15026 – Annex A

Az *MSZ EN 15026 Hygrothermal performance of building components and building elements. Assessment of moisture transfer by numerical simulation* [4] szabvány a numerikus HAM számítások legalapvetőbb elméleti hátterét foglalja össze, és megad egy benchmark tesztet az ilyen programok validálására. Ez a teszt egy analitikusan megoldott HAM probléma, mellyel összehasonlítva ellenőrizhető az adott numerikus megoldás pontossága.

Egy homogén végtelen féltérben kialakuló hőmérséklet és nedvességprofilt ellenőrzi a teszt. Az anyag teljesen légzáró. A 0 időpillanatban egyensúlyban van a vizsgált tartomány, majd a peremen a hőmérséklet és a relatív nedvességtartalom is egy hirtelen lépésben megváltozik. Az adott időpillanatokban vett hőmérséklet és nedvességtartalom profilokat kell összehasonlítani a szabványban megadott analitikus kiszámított eredményekkel.

- Kezdeti feltételek (az egész szerkezetben és a peremen): θ = 20 [°C], φ=50 [%];
- Peremfeltételek a lépés után: θ_s = 30 [°C], φ=95 [%];
- A felületi ellenállás nulla. Csapóesőt, vagy bármilyen más nedvességforrást nem veszünk figyelembe.
- A hőmérséklet és nedvességtartalom profilokat 7, 30 és 365 nap után kell összevetni a szabványos eredményekkel. A maximális eltérés legfeljebb ± 2.5 % lehet.

Általános adatok:

T_{ref} = 293.15 [K]
ρ_w = 1000 [kg/m^3]
R_{H2O} = 462 [J/kgK]

Konstans anyagjellemzők:

Porozitás = 0.146 [-]
c_{dry} = 850 [J/kgK]
ρ_{dry} = 2146 [kg/m^3]

Összetett anyagjellemzők:

- A hővezetési tényező a nedvességtartalom függvényében:

$$\lambda = 1.5 + \frac{15.8}{1000} w \quad \text{[W/mK]}$$

- A nedvességtartalom a relatív páratartalom függvényében (nedvességtartalom függvény):

$$w = \frac{146}{\left(1 + \left(-8 \cdot 10^{-8} \cdot R_{H2O} \cdot T_{ref} \cdot \rho_w \cdot \ln(\varphi)\right)^{1.6}\right)^{0.375}} \quad \text{[kg/m}^3\text{]}$$

- A szabvány közvetlenül a páradiffúziós tényezőt adja meg a nedvességtartalom függvényében:

$$\delta_p = \frac{M_w}{RT} \cdot \frac{26.1 \cdot 10^{-6}}{200} \cdot \frac{1 - \frac{w}{146}}{0.503\left(1 - \frac{w}{146}\right)^2 + 0.497} \quad \text{[kg/msPa]}$$

Ez alapján a páradiffúziós ellenállási szám a következő képpen számítható (közelítőleg):

$$\mu = \frac{\delta}{\delta_p} = \frac{1.968 \cdot 10^{-7} \cdot (25 + 273)^{0.81}}{101325 \cdot \delta_p} \quad [-]$$

P = 101325 [Pa] és θ = 25 [°C] mellett

- A kapilláris nedvességvezetést a szabvány a folyadékvezetési számmal (K [kg/msPa]) adja meg, ami a kapilláris szívás gradiense alapján határozza meg a folyékony nedvességáramot.

$$K = \exp\begin{pmatrix} -39.2619 + 0.0704 \cdot (w - 73) - 1.7420 \cdot 10^{-4} \cdot (w - 73)^2 - 2.7953 \cdot 10^{-6} \cdot (w - 73)^3 \\ -1.1566 \cdot 10^{-7} \cdot (w - 73)^4 + 2.5969 \cdot 10^{-9} \cdot (w - 73)^5 \end{pmatrix}$$

Ezt át kell számítani a programban használt D_w folyadéktranszport együtthatóra:

$$D_w = -K \frac{\partial p_{suc}}{\partial w}$$

Itt $p_{suc}(w)$ a szabványban megadott egyik nedvességtartalom függvény inverze:

$$D_w = 0.125 \cdot 10^8 \left(\left(\frac{146}{w} \right)^{\frac{1}{0.375}} - 1 \right)^{0.625}$$

A deriváltja w szerint pedig:

$$\frac{\partial p_{suc}}{\partial w} = -p_{suc} \frac{0.625}{1 - \left(\frac{146}{w} \right)^{-\frac{1}{0.375}}} \frac{1}{0.375w}$$

A nedvességtartalom profilok megengedett sávja a szabványból:

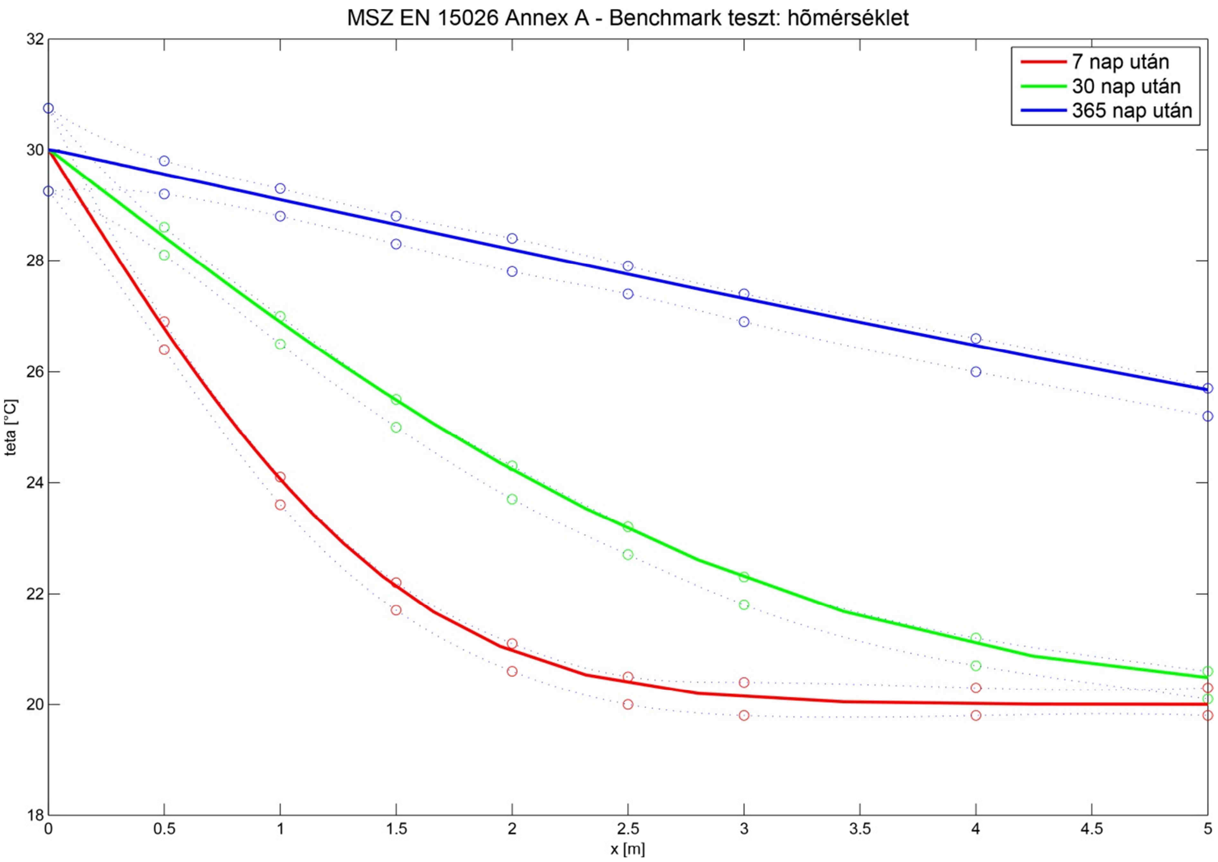
napok	x=0.01		x=0.02		x=0.03		x=0.04		x=0.05		x=0.06		x=0.08		x=0.10	
	min.	max.	min.	max.	min.	max.	min.	max.	min.	max.	min.	max.	min.	max.	min.	max.
7	50.2	54,5	41,3	45,6	40,8	45,1	40,8	45,1								
30	81,0	85,3	51,1	55,3	43,6	47,9	41,5	45,7	40,9	45,2	40,8	45,1	40,8	45,1		
365	117,5	121,8	104,4	180,7	88,7	93,0	75,6	77,9	62,8	67,1	55,7	60,0	47,9	52,2	44,1	48,4

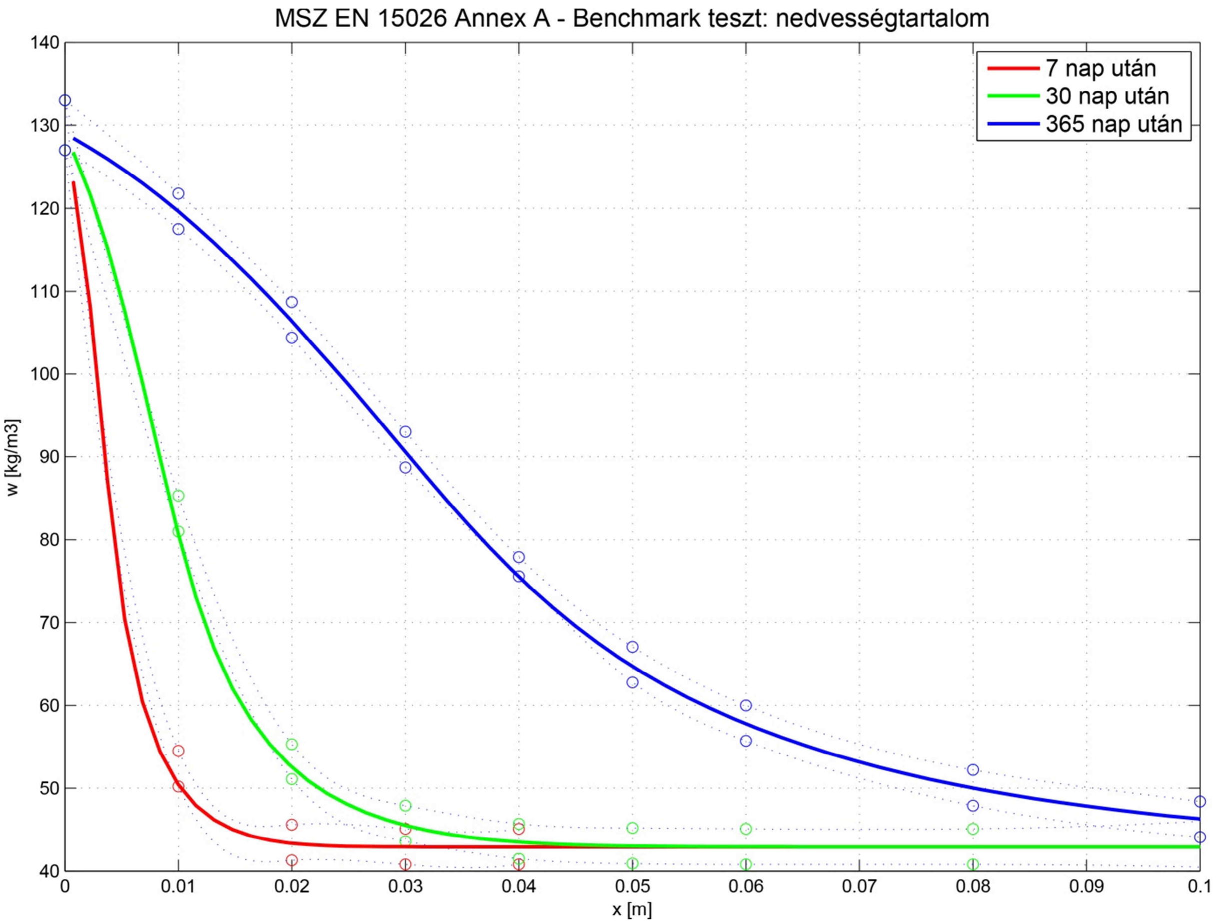
A hőmérséklet profilok megengedett sávja a szabványból:

napok	x=0.5		x=1		x=1.5		x=2.0		x=2.5		x=3.0		x=4.0		x=5.0	
	min.	max.	min.	max.	min.	max.	min.	max.	min.	max.	min.	max.	min.	max.	min.	max.
7	26,4	26,9	23,6	24,1	21,7	22,2	21,1	20,5	20,0	20,5	19,8	20,4	19,8	20,3	19,8	20,3
30	28,1	28,6	26,5	27,0	25,0	25,5	23,7	24,3	22,7	23,2	21,8	22,3	20,7	21,2	20,1	20,6
365	29,2	29,8	28,8	29,3	28,3	28,8	27,8	28,4	27,4	27,9	26,9	27,4	26,0	26,6	25,2	25,7

A számításhoz a szabványban e függvényekkel megadott anyagjellemzőket táblázatos formába kell rendezni egy anyagleíró file-ban (EN-15026_MatData.txt) és megírni egy megfelelő input file-t is (EN-15026_input.txt).

A kapott eredményeket a következő 2 ábra mutatja be. Látható módon mind a hőmérséklet, mind a relatív a nedvességtartalom esetében a kapott értékek a szabvány által meghatározott tartományon belül esnek.





6 Bibliográfia

[1] **Künzel, Hartwig M.** *Verfahren zur ein- und zweidimensionalen Berechnung des gekoppelten Wärme- und Feuchtetransports in Bauteilen mit einfachen Kennwerten*. doktori disszertáció, Universität Stuttgart, 1994.

[2] **Krus, Martin.** *Feuchtetransport- und Speicherkoeffizienten poröser mineralischer Buastoffe. Theoretische Grundlagen und neue Meßtechniken*. doktori disszeertáció, Universität Stuttgart, 1995.

[3] **Murthy, J. Y. és Mathur, S. R.** *Numerical Methods in Heat, Mass and Momentum Transfer.,* School of Mechanical Engineering, Purdue University, 2002.

[4] **MSZ EN 15026** *Hygrothermal performance of building components and building elements. Assessment of moisture transfer by numerical simulation*