



BME Építésmérnöki Kar
Épületszerkeztani Tanszék

Transzportfolyamatok modellezése az épületszerkezetekben

Jegyzet (vázlat)
az
Épületszerkezetek Transzportfolyamatai I.
és
Épületszerkezetek Transzportfolyamati II.
tantárgyakhoz

Bakonyi Dániel

okl. építésmérnök, tanársegéd

2016. 09. 08. állapot

Tartalomjegyzék

1	Bevezetés	4
1.1	Az épületfizika tárgya	4
1.2	Valóság, modell, szimuláció	4
1.3	A nem egyensúlyi termodinamika fogalma	5
1.4	Matematikai alapok I.	8
1.4.1	Közönséges differenciálegyenletek	10
1.4.2	Parciális differenciálegyenletek	11
1.4.3	Skalárterek	12
1.4.4	Gradiens	13
1.4.5	Vektorterek	14
1.4.6	A vektorterek potenciálja	15
1.4.7	A vektorterek divergenciája	15
1.4.8	Gauss-Osztrogradszkiy tétel	16
1.5	A hőtranszport egyenletének alapjai	16
1.5.1	A hőtranszport mechanizmusai	17
1.5.2	Hővezetés - Fourier törvénye	17
1.5.3	A stacioner hővezetés egyenlete, a Laplace egyenlet	18
1.6	Javaolt irodalom a fejezethez:	20
2	A numerikus módszerek alapjai	21
2.1	A stacioner hővezetés egyenletének egy speciális analitikus megoldása	21
2.2	Numerikus megoldás, numerikus módszerek	22
2.2.1	A numerikus megoldás és a numerikus módszerek definíciója	22
2.2.2	Kis „numerikus módszerek történelem”	24
2.3	Véges differenciák	27
2.4	A Taylor sor	29
2.5	A másodrendű véges differencia alapséma hibája	32
2.6	Egy konkrét példa	34
3	Többdimenziós stacioner hővezetés – hőhídszimuláció gyakorlat	37
4	Transzparens szerkezetek hőtechnikai modellezése - elmélet	37
4.1	Hősugárzás alapismeretek	37
4.1.1	Az elektromágneses sugárzás spektrum	38
4.1.2	Abszolút fekete test sugárzása	39
4.1.3	Szürke testek	40
4.1.4	aaa.....	Hiba! A könyvjelző nem létezik.

4.1.5	Építési üvegek sugárzástechnikai jellemzői.....	43
4.2	A konvektív hőátadás alapismeretek	44
4.3	Réteges üvegszerkezetek energiamérlege	44
5	Transzparens szerkezetek hőtechnikai modellezése 2 – árnyékolók és gyakorlat.....	45
6	Transzparens szerkezetek hőtechnikai modellezése 3 – egész ablakszerkezetek hőtechnikai paramétereinek számítása	45
7	Instacioner hővezetés – elmélet, numerikus módszerek alapjai	45
8	Instacioner hővezetés – gyakorlat	45
9	Véges térfogat módszer alapjai, Matlab alapok	46
10	HAM modellezés – elméleti alapok 1	46
11	HAM modellezés – elméleti alapok 2.....	46
12	HAM modellezés – gyakorlat 1	47
13	HAM modellezés – gyakorlat 1	47
14	Kitekintés: épület szintű modellek.....	47
15	Melléklet.....	47
15.1	Matematikai jelölések.....	47
15.2	Deriválás	48

1 Bevezetés

1.1 Az épületfizika tárgya

Az **épületfizika** az alkalmazott fizika egy ága, az épületekben, ill. azok komponenseiben lezajló:

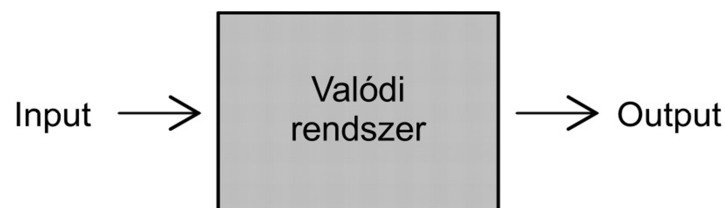
- hőtechnikai,
- nedvességtechnikai,
- áramlástani,
- hang- és rezgésterjedési
- tűzzel és magas hőmérsékleti hatásokkal kapcsolatos jelenségek,

és ezek kölcsönhatásainak a leírásával foglalkozik. Szinte minden területet érint a statikán és a tartószerkezeti tervezésen és az anyagtudományok egy részén kívül. Itt és most azonban csak a hő- és páratechnikáról, kis részben az áramlástanról lesz szó.

1.2 Valóság, modell, szimuláció

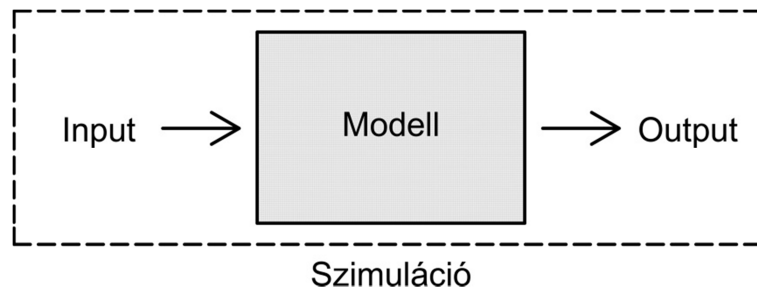
Számtalanszor kell megválaszoznunk a következő, vagy ahhoz igen hasonló kérdéseket: „mi történne ha”? Egy ilyen kérdés a legkülönbébb „rendszerekre” irányulhat. Itt rendszer alatt a valóságnak egy valamilyen módon kiragadott, lehatárolt részét értjük, melynek a működése érdekel minket. Egy részecskefizikusnak ez a rendszer a szubatomi világ, míg egy asztrofizikusnak az egész univerzum (vagy egyes elméletek szerint az univerzumok) működése is lehet. Egy építész valahol a kettő között foglal helyet: lehet, hogy egyetlen építőanyag tulajdonságai, egy komplett falszerkezet valamilyen viselkedése, vagy mondjuk egy több ezer négyzetméteres összetett középület épületenergetikai működése érdekli.

Elméletben minden kérdésünkre választ kaphatunk, ha meg tudjuk vizsgálni (mérni) rendszerünk viselkedését (a méréseink lehetséges hibahatárán belül) az általunk érdekesnek ítélt hatások alatt és az eredményeket kellő körültekintéssel értékeljük ki (1. ábra). Az építőiparban azonban a „késztermék”, azaz az épület szintjén a legtöbb esetben szinte teljesen lehetetlen a kísérletezés. A költségek túl nagyok lennének, túl sok időt venne igénybe, és sok kérdésünk még eleve meg sem épített épületekre irányul. Ennek egyik következménye, hogy az építőipar talán az egyetlen iparág, ahol nincsenek prototípusok és tesztelési folyamat (legfeljebb a komponensi szinten), holott az egyik legnagyobb értékű és élettartamú cikket állítja elő.



1. ábra Input-output rendszer a valóságban

Azonban a gyakorlatban nem szükséges minden esetben kísérleteket végeznünk. Sokszor kielégítően pontos eredményt kapunk, ha a valós rendszert egy „modell” helyettesítjük. Egy-egy modell nem más, mint valamilyen szabályok összessége, melyek alapján egy adott hatás, vagy input alapján meg tudjuk állapítani azok (és reményeink szerint a modellezett rendszer) válaszát (vagy outputját). A szimuláció nem más, mint ez a tevékenység: modellalkotás, „kérdések” feltevése a modell számára és a kapott „válaszok” feljegyzése (2. ábra).

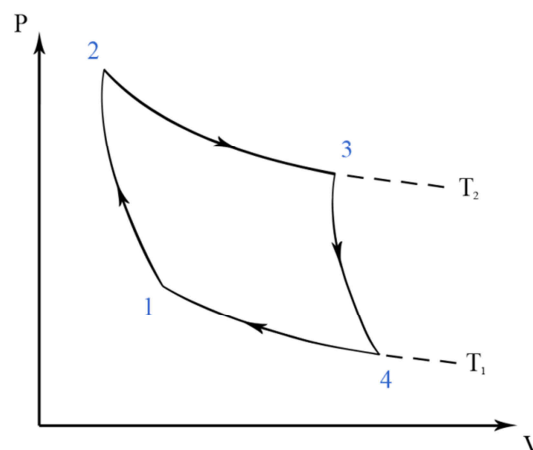


2. ábra A valódi rendszer helyettesítése egy modellel a szimuláció során

1.3 A nem egyensúlyi termodinamika fogalma

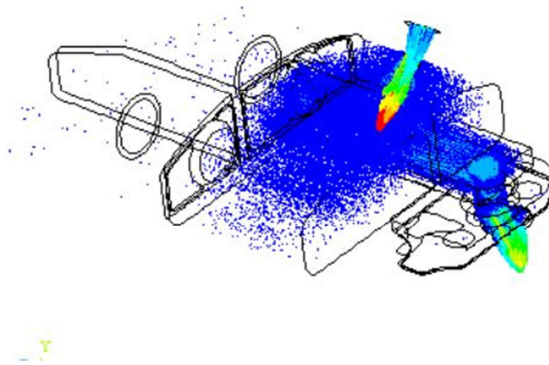
A **Termodinamika** a különféle energiaátalakulások vizsgálata, melyhez sokféle képpen hozzá lehet állni. A különféle módszerek alapvetően mások a szerint, hogy milyen feltételezéssel élnek a rendszer fizikai működéséről, milyen modellezési technikákat alkalmaznak. A mi szempontunkból elegendő, ha kétféle megközelítésre bontjuk a tudományterületet: az egyensúlyi és a nem egyensúlyi termodinamikára.

Az **Egyensúlyi termodinamika** (vagy termosztatika) a jelenségek egyes állapotait vizsgálja, azokat hasonlítja egymáshoz. Nem foglalkozik a jelenségek lezajlásának idejével, pontos mechanizmusaival. Jó példa erre egy körfolyamat grafikon (3. ábra). Ez a fajta modell nem foglalkozik a körfolyamat mögött lévő pl. hűtőgép térbeli kiterjedésével, csöveivel, szelepeivel, hanem egy diszkrét rendszernek tekinti azt, ami „valamilyen módon” az egyik állapotból a másikba kerül és ezeket az állapotokat írja le fizikai jellemzőkkel. Ezt úgy is nevezhetjük, hogy koncentrált paraméterű modellezés. A gimnáziumi fizikaórákon általában ezzel a termodinamikai megközelítéssel találkozunk.



3. ábra a Carnot-körfolyamat

A **Nem-egyensúlyi termodinamika** máshogy közelíti meg a jelenségek leírását. Nem diszkrét paraméterű homogén rendszerek egyes állapotaival, hanem kontinuumok leírásával foglalkozik. A vizsgált rendszer nincsen egyensúlyban, még ha időben állandósult folyamatokat vizsgálunk is: a hőmérséklet és nyomáskülönbségek hatására létrejövő áramok, azok időbeli és térbeli lefolyását vizsgálja. Példaként az egyensúlyi termodinamikánál említett hűtőgép egy konkrét elemének, például a kompresszor szívócsatornájának egy numerikus áramlástan szimulációját említhetjük (4. ábra). Amikor egy ilyen elemet akarunk optimalizálni, akkor a tényleges lokális impulzus- és hőáramok érdekelnek bennünket ezért a kontinuum modellekhez és a nem egyensúlyi termodinamikához kell nyúlnunk.



4. ábra egy hűtőgép kompresszor szívócsatornájának numerikus áramlástan szimulációja

A kontinuumok leírására használt fizikai mennyiségek között meg kell különböztetni az úgynevezett intenzív és extenzív mennyiségeket:

Az **Intenzív mennyiségek** lokális jellemzők, azaz a rendszer 1-1 pontjában értelmezhetőek. Nem függenek a rendszer méretétől és nem additívak. Ilyen mennyiségek például a:

- hőmérséklet: T [K]
- sűrűség: ρ [kg/m³]
- fajhő: c [J/kgK]
- nyomás: P [Pa]
- koncentráció: C [kg/m³]
- dinamikai és kinetikai viszkozitás: μ [kg/ms], ν [m²/s]

Az **extenzív mennyiségek** mértékjellegű mennyiségek. Függenek a rendszer nagyságától (tömegétől vagy térfogatától), ezért additívak, cserélődhetnek, áramolhatnak és forrásuk is lehet: keletkezhetnek és elnyelődhetnek. Egy-egy pontra nem lehet értelmezni őket, csak az egész rendszerre vagy annak egy-egy elemi egységére. Ilyen mennyiségek például a:

- tömeg: m [kg]
- térfogat: V [m³]
- energia: E [J]
- hő: Q [J]
- entalpia: H [J] (egy zárt rendszer összes energiatartalma, a belső energia, látens hő és térfogati munka összege)
- impulzus: [kgm/s]
- anyagmennyiség: n [mol]
- hossz: l [m]

Két extenzív mennyiség hányadosa intenzív, például a sűrűség: $\rho = m/V$.

Az intenzív mennyiségek térbeni és időbeli inhomogenitás esetén kiegyenlítődésre törekednek, és a hozzájuk tartozó extenzív mennyiségek áramát indítja el: ezek a **transzportfolyamatok** (a rendszert alkotók részecskék vagy extenzív fizikai mennyiségek egyik helyről a másikba elmozdulása, átadása, szállítása). A transzportfolyamatokat leíró egyenletek **mérlegegyenletek**, melyek lehető legegyszerűbb és általános formája időben változó, azaz **tranziens transzportfolyamatokra**:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{extenzív mennyiség} \\ \text{időbeli megváltozása} \\ \text{egy elemi térfogatban} \end{array}} = \boxed{\begin{array}{l} \text{extenzív mennyiség} \\ \text{vezetési ki- és beáramlásának} \\ \text{előjeles összege} \\ \text{az elemi térfogatban} \end{array}} + \boxed{\begin{array}{l} \text{extenzív mennyiség} \\ \text{forrása} \\ \text{az elemi térfogatban} \end{array}} + \boxed{\begin{array}{l} \text{extenzív mennyiség} \\ \text{konvektív ki- és beáramlásának} \\ \text{előjeles összege} \\ \text{az elemi térfogatban} \end{array}}$$

Tehát egy adott rendszerben, vagy a rendszer egy adott elemi részében egy extenzív mennyiség megváltozása a mennyiség áramával (konduktív és konvektív) vagy valamilyen forrással tud megváltozni.

Időben állandósult, azaz **stacioner transzportfolyamatok**nál az adott extenzív mennyiség a rendszer semelyik részén nem változik:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{extenzív mennyiség} \\ \text{vezetési ki- és beáramlásának} \\ \text{előjeles összege} \\ \text{az elemi térfogatban} \end{array}} + \boxed{\begin{array}{l} \text{extenzív mennyiség} \\ \text{forrása} \\ \text{az elemi térfogatban} \end{array}} + \boxed{\begin{array}{l} \text{extenzív mennyiség} \\ \text{konvektív ki- és beáramlásának} \\ \text{előjeles összege} \\ \text{az elemi térfogatban} \end{array}} = 0$$

Tehát a különböző transzport mechanizmusok és a források egyensúly tartanak egymással.

Az intenzív és az extenzív mennyiségek között egyértelmű kapcsolat van, így tudunk matematikai modelleket felállítani és leírni a rendszer működését. Minden transzportfolyamat leírása végeredményben igen hasonló és ezt a sémát követi, még ha az egyenlet egyes tagjai merőben eltérőek is. A megoldásukra használt matematikai módszerek is nagyban hasonlítanak, bár természetesen minden konkrét esetnek megvannak a maga nehézségei és „trükkjei”.

Az épületfizikában a következő transzportfolyamatokkal foglalkozunk:

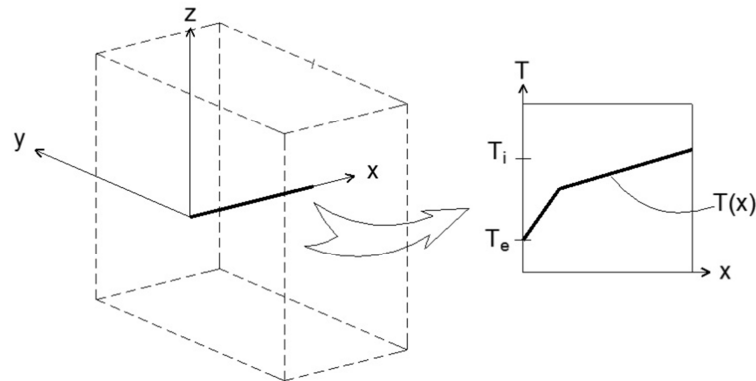
- hőtranszport (konduktív, konvektív, entalpiaáram...)
- nedvességtanszport (diffúzió, kapilláris nedvességvezetés, konvektív nedvességvezetés...)
- impulzus transzport (folyadékok áramlásában az áramlási sebességek leírására)
- tömeg transzport (pl. légáramlással szállított részecskék, hűtő-fűtő közegek árama, stb.)
- CO₂ transzport
- VOC (Volatile Organic Compound, azaz illékony szerves vegyület) transzport
- só transzport
- ...

Először a hőtranszportra fogunk koncentrálni, amit majd a hősugárzás egyszerű modelljeivel, a nedvességtanszporttal és kis mértékben áramlástannal fogunk kiegészíteni. Végeredményben a feladat, hogy felírjuk és értelmezzük ezeket az egyenleteket, és utána meg is oldjuk őket valamilyen módszerrel. Ehhez azonban először a szükséges matematikai alapokat kell átismételni.

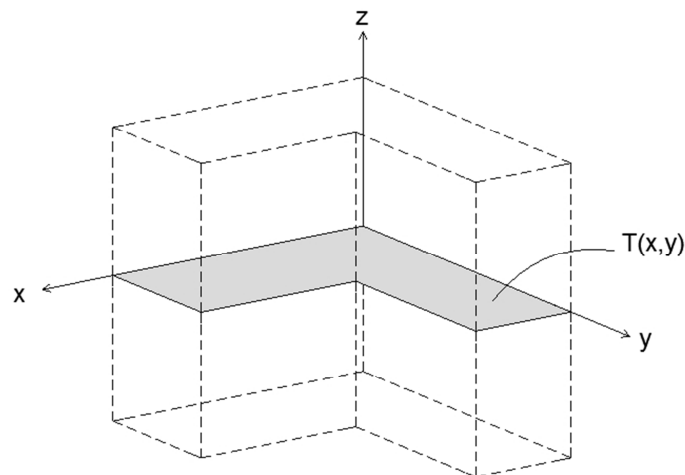
1.4 Matematikai alapok I.

A térben és időben lejátszódó transzportfolyamatok leírásához a vizsgált fizikai mennyiségeknek is matematikai leírást kell adnunk. Például:

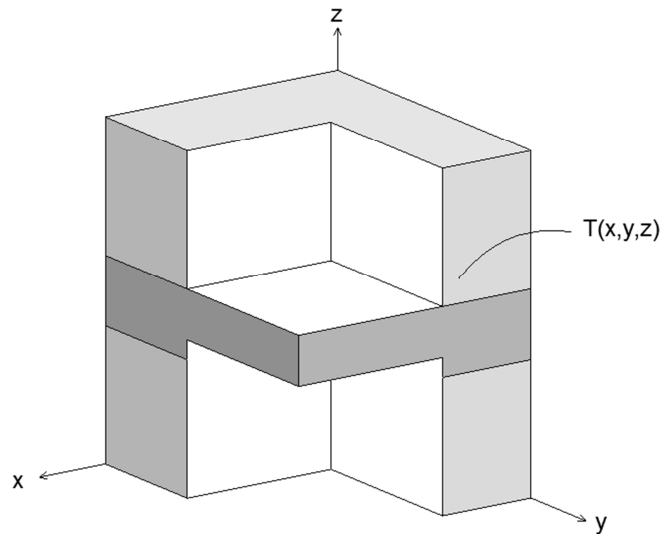
- A hőmérséklet egy $T(x)$ egydimenziós függvénnyel írható le egy falban, amennyiben a fal teljesen egyensúlyba került a környezetével, valamint közel végtelen felületűnek és homogénnek tekinthető. Azaz egy adott pont hőmérséklete nem függ se az y , se az z koordinátától és a t időponttól, egyedül attól, hogy milyen „mélyen van” a fal rétegeiben.



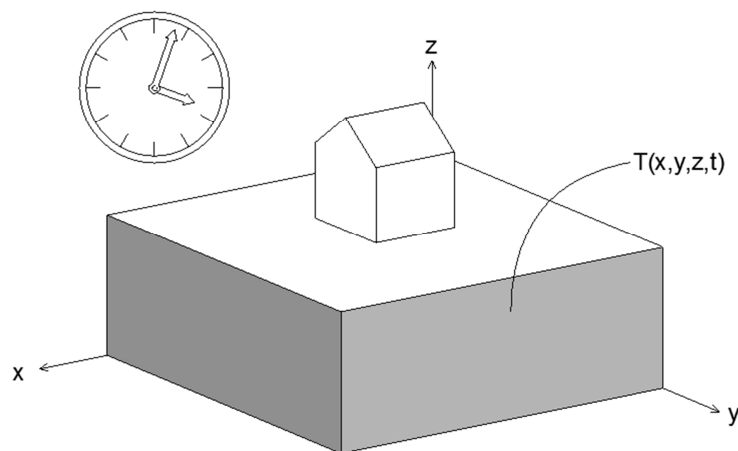
- A hőmérséklet egy $T(x,y)$ kétdimenziós függvénnyel írható le egy végtelen hosszúnak (magasnak) tekinthető falsarok stacioner (egyensúlyi állapotban vett) hőhídszimulációjában, ahol az adott pont hőmérséklete csak a falsarok általános vízszintes metszetében vett pozíciótól: az x és y koordinátától függ, a z koordinátától és az időtől független.



- A hőmérséklet egy $T(x,y,z)$ háromdimenziós függvénnyel írható le egy pozitív falsarok és födém csomópont stacioner (egyensúlyi állapotban vett) hőhídszimulációjában, ahol az adott pont hőmérséklete a szerkezetben vett térbeli helyzetétől, azaz x , y és z koordinátájától is függ, de az időtől nem.



- A hőmérséklet egy $T(x,y,z,t)$ négydimenziós függvénnyel írható le egy az épület alatt az alapszerkezet és a talaj hőtárolását vizsgáló szimulációban, ahol egy pont hőmérséklete a három térbeli koordináta mellett az időtől is függ.



A vizsgált fizikai mennyiségekre majdan felírandó mérlegegyenletek ezeknek a függvényeknek a különféle deriváltjait fogják tartalmazni. Így differenciál és parciális differenciálegyenleteket fogunk kapni.

1.4.1 Közönséges differenciálegyenletek

Egy közönséges differenciálegyenlet olyan egyenlet, melynek ismeretlene egy egyváltozós függvény: $y(x)$, és az egyenlet az ismeretlen különböző deriváltjai között teremt kapcsolatot. Egy elsőrendű közönséges differenciálegyenlet általános alakja:

$$y'(x) = F(x, y(x))$$

Egy közönséges **differenciálegyenlet rendje** a benne szereplő legmagasabb rendű derivált rendje, azaz a legfeljebb elsőrendű deriváltakat tartalmazó differenciálegyenlet elsőrendű, a legfeljebb második deriváltakat tartalmazó másodrendű, és így tovább.

Példaként vegyünk egy egyszerű elsőrendű közönséges differenciálegyenletet:

$$\frac{dy}{dx} = x \quad (1.)$$

Egy differenciálegyenlet **általános megoldása** azon függvények csoportja melyek kielégítik a differenciálegyenletet. De ha visszaemlékezünk, korábbi matematikai tanulmányainkra akár végtelen számú megoldás létezhet, melyek például egy-egy konstansban térnek el egymástól (egy elsőrendű differenciálegyenletnél). A példánkban ránézésre megállapítható, hogy az általános megoldás:

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2 + c \quad (2.)$$

Ahhoz hogy egy **partikuláris megoldást** kaphassunk további feltételeket kell megszabnunk. Ez alapvetően kétféle módon történhet: kezdeti- vagy peremértékekkel.

Egy **kezdeti érték problémánál** egy n -ed rendű differenciálegyenlethez meg kell adni a független változó (esetünkben x) egy adott értékhez tartozó függvényértékét ($y(x)$) és az elsőtől az $(n-1)$ -edik deriválthoz tartozó értékét ($y'(x)$, $y''(x)$, ...).

A példánkban, mivel egy elsőrendű differenciálegyenletet vettünk, csak a függvény értékét kell megadnunk ($n-1=0$) egy adott pontban. Ez az érték az úgynevezett kezdeti érték. A kezdeti érték legyen:

$$y(x=0) = 1 \quad (3.)$$

Behelyettesítve az általános megoldásba:

$$y(x=0) = \frac{1}{2}x^2 + c = 1 \quad (4.)$$

Tehát a partikuláris megoldás:

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1 \quad (5.)$$

Egy **peremérték problémánál** egy n -ed rendű differenciálegyenlethez n pontban kell megadni az összetartozó x és $y(x)$ értékeket. Például egy másodrendű közönséges differenciálegyenletnél melyet 0 és 1 között értelmezünk $y(x)$ értékét $x=0$ és $x=1$ pontban. Ezeket az értékeket nevezzük peremértékeknek vagy

peremfeltételeknek. Egy elsőrendű differenciálegyenletnél gyakorlatilag nincs különbség peremérték és kezdeti érték probléma között, ezért példaként nézzünk egy egyszerű másodrendű egyenletet:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$$

Ránézésre megállapítható, hogy az általános megoldás:

$$y(x) = ax + b$$

A partikuláris megoldáshoz szükséges peremfeltételek legyenek:

$$y(x=0) = 2 \quad \text{és} \quad y(x=1) = 3$$

Egymás után behelyettesítve őket az általános megoldásba hamar megállapítható, hogy a partikuláris megoldás:

$$y(x) = x + 2$$

1.4.2 Parciális differenciálegyenletek

Egy parciális differenciálegyenlet olyan egyenlet, melynek ismeretlene egy többváltozós függvény: $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, és az egyenlet az ismeretlen függvény különböző (legalább kettő) változók szerinti deriváltjai között teremt kapcsolatot. Általános alakban:

$$F\left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n}, \dots\right) = 0$$

Egy parciális **differenciálegyenlet rendje** a benne szereplő legmagasabb rendű derivált rendje, azaz a legfeljebb első deriváltakat tartalmazó egyenlet elsőrendű, a második deriváltakat is tartalmazó másodrendű, és így tovább.

Egy parciális differenciálegyenlet **általános megoldása** azon függvények csoportja melyek kielégítik a differenciálegyenletet. A közönséges differenciálegyenletekhez hasonlóan itt is további feltételekre van szükségünk, hogy megkapjuk az egyenlet egy **partikuláris megoldását**. Ezek a további feltételek itt is **kezdeti** és **peremfeltételek** lehetnek, és az adott problémától függ, hogy milyen formában van rájuk szükség.

Legyen egy példa egyenlet:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Az u függvény a t és x koordinátától függ (ezek lehetnek például az idő és a pozíció egy tengely mentén) és az u -ra felírt egyenletünk annak t és x szerinti deriváltjait is tartalmazza. A t változó szerinti első derivált és az x szerinti második derivált szerepel az egyenletben, ezért összességében ez egy másodrendű parciális differenciálegyenlet. Az u függvényt elképzelhetjük úgy is, mint az x - t sík fölé kifeszített felületet, vagy u változását egy x egyenes mentén az időben (a t koordináta mentén). Ha az utóbbi módon képzeljük el u -t, akkor talán könnyen belátható, hogy pontos kiszámításához meg kell adjuk a kezdeti értékét és az x tengely elején és végén felvett értékét, vagyis a peremfeltételeit is.

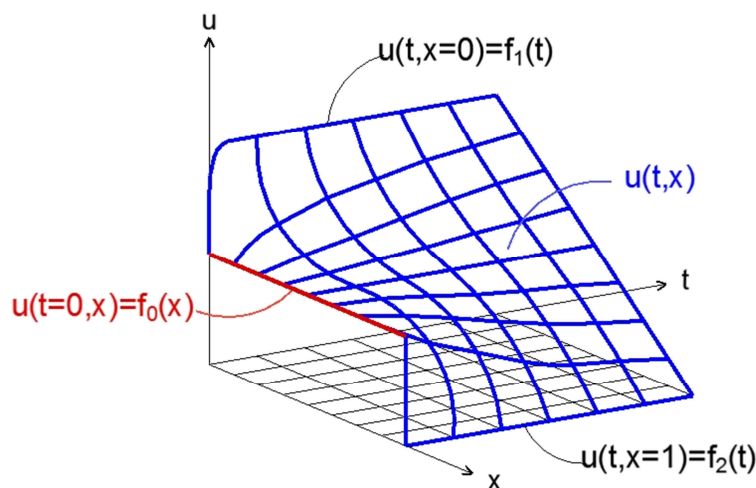
A kezdeti érték megadása nem elegendő egyetlen $(t = t_0, x = x_1)$ pontban, hanem például az egyik változó egy konkrét értéke mellett a többi változó teljes értelmezési tartományára kell vonatkozzon:

$$u(t = t_0, x) = f(x)$$

A peremfeltételek megadása pedig így történhet:

$$u(t, x = 0) = 1 \quad \text{és} \quad u(t, x = 1) = 0$$

Láthatóan ezek a peremfeltételek stacionerek, mert nem függenek az időtől (konstansak).



5. ábra

Parciális differenciálegyenleteknél a peremfeltételeknek többféle típusa ismert. A legfontosabb típusok

- **Dirichlet**, vagy első típusú peremfeltétel. Az ismeretlen függvény értékét adjuk meg az adott pontban: $u(t, x = 0) = 0$, egy él $u(x = 0, y) = f(y)$ vagy akár egy felület mentén.
- **Neumann**, vagy második típusú peremfeltétel. Az ismeretlen függvény az értelmezési tartományra merőleges deriváltjának az értékét adja meg egy pontban, egy perem mentén:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial n} = f(x, y) \quad \text{vagy akár egy felület mentén:} \quad \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial n} = f(x, y, z)$$

- **Robin**, vagy harmadik típusú peremfeltétel. Az ismeretlen függvény az értelmezési tartományra merőleges deriváltját a függvényérték egy lineáris kombinációjával adjuk meg egy adott pontban, egy

$$\text{adott él mentén:} \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial n} = k(u - u_0), \quad \text{vagy akár egy felület mentén:} \quad \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial n} = k(u - u_0)$$

1.4.3 Skalárterek

Ahogy azt láttuk az intenzív mennyiségeket (hőmérséklet, nyomás, parciális nyomás és páratartalom, stb.) a nem-egyensúlyi termodinamika kontinuum modelljeiben sokváltozós függvényekkel tudjuk leírni, például:

$T(x, y, z, t)$ Ezek a függvények **skalártereket** határoznak meg. Ezen azt értjük, hogy ezeknek a skalártérnek minden egyes például az (x, y, z, t) koordinátákkal meghatározott pontjában van egy-egy értéke, ami egy skalár, azaz szám (tehát nem vektor). Egy egydimenziós skalárteret elképzelhetünk úgy, mint egy számegetest, melynek minden pontjában van egy értéke (az x koordinátától eltérő). Két változó esetén egy xy sík minden pontja rendelkezik egy értékkel. Egy kétdimenziós skalárter legegyszerűbben szintvonalával jellemezhető (az azonos értékű pontokat összekötő görbék a szintvonalak). Még a háromdimenziós skalárter is elképzelhető mintegy adott térfogat illetve test, melynek minden egyes pontja rendelkezik egy értékkel. Három dimenzióban szintvonalak helyett szintfelületeket definiálhatunk ennek szemléltetésére. egy négy dimenziós skalárter elképzelése talán már meghaladja a képzelőerőnket, de a matematikai leírásban nincsen lényeges különbség.

A transzportfolyamatok a hozzájuk tartozó intenzív mennyiségek inhomogenitása miatt játszódnak le (például a hőmérséklet térben és időben eltérő volta miatt), ezért a skalárterek megváltozását kell megvizsgálnunk. A skalárterek időben és térben változnak. Az idő szerinti megváltozás jellemzésére az idő szerinti derivált, a hely szerinti megváltozására pedig a gradiens szolgál.

1.4.4 Gradiens

A **gradiens** egy skalármezőkre alkalmazható **differenciáloperátor**. Egy függvény gradiense a függvény deriváltjának általánosítása többdimenziós terekre. X , Y és Z komponensei az adott fizikai mennyiség x , y és z irányú megváltozásának rohamosságával arányosak.

Jelölése: grad vagy ∇ (Nabla szimbólum).

A Nabla vektor komponensei:

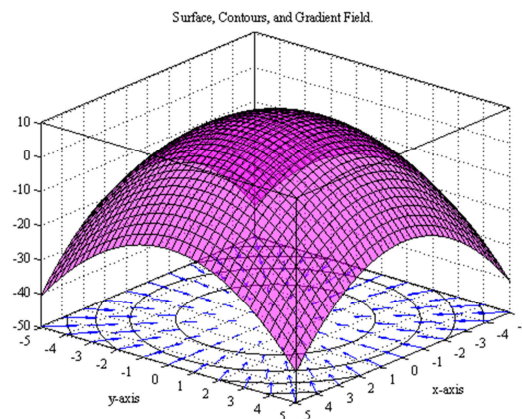
$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \underline{i} + \frac{\partial}{\partial y} \underline{j} + \frac{\partial}{\partial z} \underline{k} \quad \text{vagy másképp jelölve:} \quad \nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Ahol $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ differenciáloperátorok, $\underline{i}$, $\underline{j}$ és $\underline{k}$ pedig az x , y és z irányú egységvektorok. Mindezek alapján egy skalárter gradiense:

$$\text{grad} F(x, y, z) = \nabla F(x, y, z) = \frac{\partial F}{\partial x} \underline{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \underline{j} + \frac{\partial F}{\partial z} \underline{k} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial F}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$\text{grad} F$ egy vektor (nabla vektor) és F skalárter szorzataként maga is vektor. A gradiens tehát a skalárter minden pontjához egy-egy vektort rendel hozzá, melynek komponensei a skalárter adott pontjában vett x , y és z

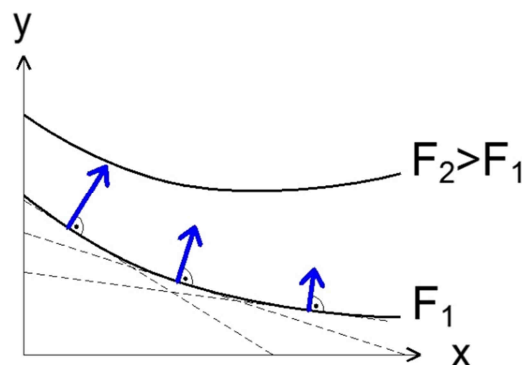
irányú deriváltjával arányosak. Természetesen a gradienst nemcsak három, hanem 2 és 1 dimenzióban is lehet értelmezni.



6. ábra egy kétdimenziós skalártér egy 3 dimenziós felülettel szemlélítve (minden egyes pontban a felület magassága a skalártér adott pontban vett értékével egyezik meg), alatta az xy síkban a skalártér szintvonalai és a gradiens vektorok

A gradiens vektorok jellemzői:

- a függő változó (F) legrohamosabb megváltozása irányával párhuzamosak
- a függő változó növekedése irányába mutatnak
- hosszuk arányos a függő változó megváltozásának rohamosságával
- merőlegesek a szintvonalakra ill. szintfelületekre



7. ábra egy F skalártér két szintvonalával és három pontba vett gradiens vektoraival szemlélítve jól megfigyelhetők a gradiens vektorok tulajdonságai

A gradiens egyik értelmezése:

$$\Delta F_{AB} = F_B - F_A \equiv \nabla F ds = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz$$

1.4.5 Vektorterek

Egy skalártér gradiense egy **vektorteret** határoz meg. Ezen azt értjük, hogy ezeknek a vektortereknek minden egyes pontjához tartozik egy vektor (melynek nagysága és iránya van). A vektortereket általában nem vektor-vektor függvényként hanem a három térbeli komponensüket leíró függvényekkel szoktuk megadni. Így egyetlen

három dimenziós vektortér leírásához 3 három (vagy ha időben is változnak akkor 4) dimenziós függvény szükséges.

1.4.6 A vektorterek potenciálja

Egy vektortér akkor potenciális, hogyha felírható a következő formában:

$$\underline{j} = \nabla \varphi$$

Azaz ha megadhatóak egy φ skalártér gradienseként. Ebben az esetben φ a $\underline{j}$ vektortér **potenciálja**. A potenciál nagyban megkönnyíti egy vektortér leírását, hiszen a vektorteret leíró mindhárom komponens leírható egyetlen skalártér segítségével. A valóságban nem minden vektortérnek van potenciálja, többek között az áramlástanban találkozunk a legtöbbször nem potenciális vektorterekkel (az áramlásokat leíró sebességterek a legtöbb áramlás fajtánál nem potenciálisok). De amint majd a következőkben látni fogjuk a hővezetés és nedvességvezetés vektorterei (hőáramsűrűségek és nedvességáram sűrűségek) szerencsénkre potenciálisok.

1.4.7 A vektorterek divergenciája

A **divergencia** a vektorterek egyik differenciáloperátora. Skalár jellegű mennyiség, azaz a vektortér minden egyes pontjához egy skalárt rendel hozzá: a vektortér divergenciáját abban a pontban. A vektorok értelmezhetőek úgy, mint valamilyen áram áramsűrűség vektorai. A divergencia a vektortér kifele mutató többlet áramának térfogati egységre vetített értékét mutatja meg, azaz hogy mennyivel nagyobb a kiáramlás a beáramlásnál. Ennek megfelelően

- a pozitív előjelű divergencia kiáramlást
- a zérus divergencia azonos vagy nulla ki- és beáramlást
- a negatív divergencia pedig beáramlást jelent.

Vizsgáljuk meg a $\underline{j}$ vektorteret, melynek egy áram áramsűrűségét adja meg, és komponensei:

$$\underline{j} = \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix}$$

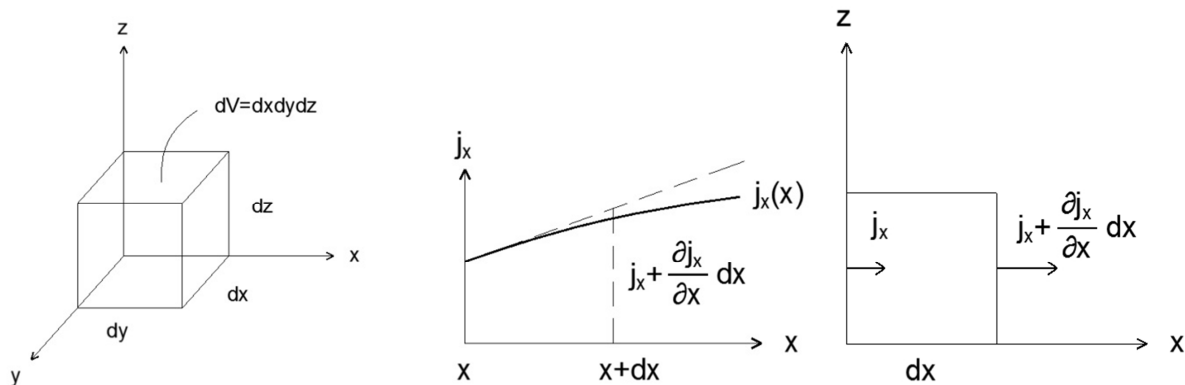
$\underline{j}$ divergenciáját a következő pontszorzással (skaláris szorzással) állíthatjuk elő:

$$\text{div } \underline{j} = \nabla \cdot \underline{j} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right) \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix} = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z}$$

Ennek belátására egy elemi élhosszúságú, a koordinátatengelyekkel párhuzamos hasábra próbáljuk meg kézzel kiszámítani, hogy mennyivel nagyobb a vektortér kiáramlása, mint beáramlása.

Először x irányban vizsgáljuk meg, hogy mennyivel több közeg áramlik ki a hasázból, mint amennyi beáramlik.

Ha x helyen az x irányú komponens j_x , akkor $x+dx$ helyen körülbelül $j_x + \frac{\partial j_x}{\partial x} dx$



Azaz az x irányú többlet kiáramlás (áram):

$$\left[\left(j_x + \frac{\partial j_x}{\partial x} dx \right) - j_x \right] dy dz$$

Az egész hasábra tehát az összes többlet kiáramlás:

$$\begin{aligned} & \left[\left(j_x + \frac{\partial j_x}{\partial x} dx \right) - j_x \right] dy dz + \left[\left(j_y + \frac{\partial j_y}{\partial y} dy \right) - j_y \right] dx dz + \left[\left(j_z + \frac{\partial j_z}{\partial z} dz \right) - j_z \right] dx dy = \\ & = \left(\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} \right) dx dy dz = \text{div } \underline{j} dV \end{aligned}$$

Ha tehát egy elemi térfogatú hasázból a többlet kiáramlás $\text{div } \underline{j} dV$, akkor egy elemi térfogati egységre vetített fajlagos értéke $\text{div } \underline{j}$, és ez a divergencia definíciója.

1.4.8 Gauss-Osztrogradszkiy tétel



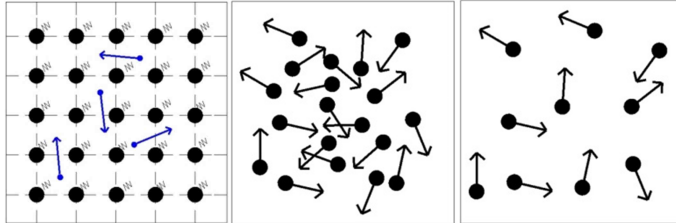
1.5 A hőtranszport egyenletének alapjai

Az épületfizikai transzportfolyamatok modellezésének alapjai a hővezetés egyenlete, ami egy lineáris másodrendű parciális differenciálegyenlet. A feltétlenül szükséges matematikai alapok átvizsgálása után ennek (illetve ebben a fejezetben egyelőre csak a stacioner formájának) a levezetését mutatjuk be. A magyar szóhasználatban a vezetés szó a hővezetés egyenleténél kissé félrevezető, célszerűbb lenne inkább hőtranszportról beszélni, mivel a hőtranszportnak a vezetésen kívül más mechanizmusai is vannak.

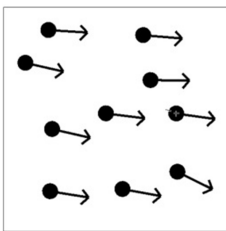
1.5.1 A hőtranszport mechanizmusai

A hőtranszport mechanizmusai:

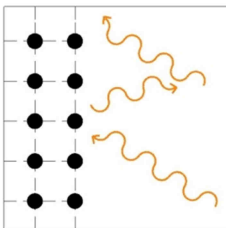
- Hővezetés, azaz hőtranszport nettó anyagvándorlás és elektromágneses sugárzás nélkül



- o a szilárd anyagokban a kötött helyzetű molekulák rezgésével és a szabad elektronok mozgásával adódik át energia
- o folyadékokban és gázokban (áramlástani értelemben mindkettő folyadék, vagy fluid) az egyes molekulák egymással való ütközéssel és diffúzióval adnak át energiát egymásnak, miközben nettó anyagáramlás nem történik
- konvektív hőáramok



- konvektív hőáramok fázisátalakulással
- hőszugárzás



1.5.2 Hővezetés - Fourier törvénye



A transzportfolyamatok lényege, hogy valamilyen intenzív mennyiség inhomogenitása a hozzá tartozó extenzív mennyiség áramát indítja el. A hővezetésnél az intenzív mennyiség a hőmérséklet és az extenzív mennyiség a hő. Tehát a hőmérsékletkülönbség hőáramokat indít be:

- Hőmérséklet: T [K], intenzív mennyiség
- A hő: Q [J], extenzív mennyiség
- A hő időegység alatti megváltozása a hőáram: $\dot{Q} = \frac{dQ}{dt}$ [W]
- A hőáram egységnyi felületre vett értéke a hőáramsűrűség: $q_{cond} = \frac{d\dot{Q}}{dA}$ [W/m²]

Fourier törvénye szerint a hővezetésnél a hőáramsűrűség egyenesen arányos a hőmérséklet megváltozásának a rohamosságával (a hőmérséklet gradiensevel), az arányossági tényező pedig a hővezetési tényező λ [W/mK]:

$$q_{cond} = -\lambda \nabla T$$

Tehát a hőáramok potenciálja a hőmérséklet.

A hőáramsűrűség egy vektor jellegű mennyiség (egy vektorteret határoz meg), hiszen egy vektormennyiség (a hőmérséklet gradiense) és egy skalár (a hővezetési tényező) szorzataként kapjuk meg. A Fourier törvény és a gradiensről tanultak alapján a hőáramsűrűség vektorok tulajdonságai:

- a hőmérséklet legrohamosabb megváltozásának irányával párhuzamosak
- a hőmérséklet csökkenésének az irányába mutatnak (ellentétben a gradienssel, ezért szükséges a negatív előjel)
- a vektorok hossza (a hőáramsűrűség vektorok nagysága) egyenesen arányos a hőmérséklet megváltozás rohamossága és a hővezetési tényező szorzatával
- a vektorok merőlegesek az izotermákra (T skalártér szintvonalaira vagy szintfelületeire)

A hőáramsűrűség vektor komponensei:

$$q_{cond} = \begin{pmatrix} q_{cond,x} \\ q_{cond,y} \\ q_{cond,z} \end{pmatrix} = -1^* \begin{pmatrix} \lambda_x & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_y & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \\ \frac{\partial T}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \\ -\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \\ -\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Az előző képlet jól szemlélteti, hogy a hővezetési tényezőnek eltérő értéke lehet az eltérő irányokba (nem izotróp anyagok), sőt valójában a hely, a hőmérséklet és például a nedvességtartalom függvénye is lehet. De egyelőre a továbbiakban az egyszerűség kedvéért konstansnak tekintjük. A numerikus módszereknél majd látni fogjuk, hogy valójában nem jelent különösebb nehézséget az sem amikor nem élünk ezzel a közelítéssel.

1.5.3 A stacioner hővezetés egyenlete, a Laplace egyenlet

A Fourier törvény önmagában még nem elegendő a hőmérsékletmező megoldásához, hiszen csak az ismeretlen hőmérséklet és a szintén ismeretlen hőáramsűrűségek között teremt kapcsolatot. Még le kell vezetnünk a hőtranszport mérlegegyenletét. Az egyszerűség kedvéért először csak stacioner folyamatokról beszélünk, azaz a

rendszer minden pontján a hőmennyiség időbeni megváltozását nullának tekintjük. A nem-egyensúlyi termodinamikáról szóló rövid bevezetőben már megemlítettük, hogy stacioner esetben a mérlegegyenletek általános alakja végeredményben:

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{extenzív mennyiség} \\ \text{vezetési ki- és beáramlásának} \\ \text{előjeles összege} \\ \text{az elemi térfogatban} \end{array}} + \boxed{\begin{array}{c} \text{extenzív mennyiség} \\ \text{forrása} \\ \text{az elemi térfogatban} \end{array}} + \boxed{\begin{array}{c} \text{extenzív mennyiség} \\ \text{konvektív ki- és beáramlásának} \\ \text{előjeles összege} \\ \text{az elemi térfogatban} \end{array}} = 0$$

További egyszerűsítünk azzal, hogy a forraserősséget és a konvektív áramokat nullának tekintjük. Így a mérlegegyenlet a következő formát veszi fel:

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{extenzív mennyiség} \\ \text{vezetési ki- és beáramlásának} \\ \text{előjeles összege} \\ \text{az elemi térfogatban} \end{array}} = 0$$

A Fourier törvénnyel le tudtuk írni a hőáramsűrűségek és a hőmérséklet kapcsolatát. A kérdés az, hogy a hőáramsűrűség vektortereiből hogyan határozható meg a ki- és beáramló hőáramok előjeles összege az elemi térfogati egységre. Amint azt már korábban láttuk vektorterek e tulajdonságának meghatározására szolgál a divergencia. A hőáramsűrűség divergenciájának nullának kell lennie:

$$-\text{div } \mathbf{q} = 0$$

A negatív előjel majd az instacioner hőtranszport egyenlet levezetésénél lesz egyértelmű, egyelőre fogadjuk el további magyarázat nélkül.

Három dimenzióban kifejtve:

$$-\text{div } \text{grad } T = -\text{div} \left(-\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} - \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} - \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0$$

A negatív előjeleket kiejtve:

$$\text{div} \left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0$$

Ahogy azt a divergenciáról szóló fejezetben láttuk egy vektortér divergenciája gyakorlatilag a Nabla vektor (differenciál operátor) és a vektortér skaláris szorzata:

$$\text{div} \left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \nabla \cdot \left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0$$

Vektoriális formában

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} & \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} & \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \end{pmatrix} = 0$$

Azaz:

$$\frac{\partial}{\partial x} \lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} = 0$$

Ha feltételezzük, hogy a hővezetési tényező konstans, akkor kiemelhetjük, és megkapjuk a **háromdimenziós stacioner hővezetés konstans anyagjellemzők melletti parciális differenciálegyenletét**:

$$\lambda_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \lambda_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

Az egyenlet e formája a hővezetési tényezőt leszámítva, illetve egy konstans és izotróp hővezetést feltételezve gyakorlatilag megegyezik az úgynevezett Laplace egyenlettel, mely a fizika számos területén nagy szerepet kap:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0$$

A Laplace egyenlet felírható az úgynevezett Laplace operátor segítségével is, ami szintén egy differenciáloperátor:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Tehát a Laplace egyenlet egyszerűbben:

$$\Delta T = 0$$

A Δ operátor nem összetévesztendő a delta T-vel!

1.6 Javasolt irodalom a fejezethez:

Gábor, L.; Zöld, A.: *Energiagazdálkodás az építészetben*, Akadémia Kiadó, 1981, Budapest, pp. 16-24, ISBN: 963-05-2536-4

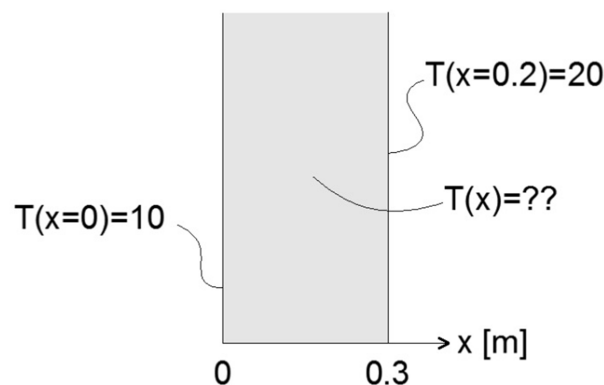
Bakonyi, D.; Becker, G.: *Épületfizikai szimulációk a gyakorlatban*, In: In: Pataky, R.; Horváth, S. (ed.), V. Épületszerkezeti Konferencia - Épületfizika, 2014, Budapest, pp. 132-150, ISBN: 978-963-313-129-9

skaláris szorzat: http://hu.wikipedia.org/wiki/Skal%C3%A1ris_szorzat

2 A numerikus módszerek alapjai

A stacioner hővezetés egyenlete az egyik legegyszerűbb parciális differenciálegyenlet az épületfizikában, ezért kiválóan alkalmas arra, hogy a numerikus módszerekbe való bevezetést rá építsük. Mielőtt azonban belemerülünk a numerikus módszerek rejtelseibe, próbálkozzunk meg egy egyszerű eset kézi analitikus megoldásával.

2.1 A stacioner hővezetés egyenletének egy speciális analitikus megoldása



A kérdés: milyen hőmérsékletmező alakul ki egy egyhjú homogén falban. A fal vastagsága legyen $d=30$ [cm], anyagában teljesen homogén és izotróp, hővezetési tényezője pedig $\lambda=1$ [W/mK]. A fal szélessége és magassága legyen jóval nagyobb (ideálisan végtelen nagy), mint vastagsága, és csak a fal egy közbülső metszetében vizsgáljuk a hőmérsékletet. Külső és a belső felülete legyen egyaránt izoterm, kívül $T(x=0)=10$ [°C] belül pedig $T(x=d)=20$ [°C] felületi hőmérsékletű. Mivel ilyen egyszerű feladatot tűztünk ki magunknak a stacioner hővezetés parciális differenciálegyenletét egyszerűsíteni tudjuk.

Mivel a fal szélessége és magassága végtelen nagy, a külső és belső felülete teljesen izoterm, anyaga pedig teljesen homogén csak a falra merőleges irányban alakulhat ki hőmérséklet gradiens és a fal a felületeivel párhuzamos metszősíkjai teljesen izotermek lesznek (tehát ezekben a síkokban a gradiens mindenütt nulla). Ennek megfelelően a hőmérséklet y és z irányú deriváltjai mind nullák lesznek és kiesnek az egyenletből:

$$\lambda_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \lambda_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad \text{ill.} \quad \lambda \frac{d^2 T}{dx^2} = 0$$

Ezzel a parciális differenciálegyenletünk egy közönséges differenciálegyenletté „szelődött”. Figyeljük meg továbbá, hogy a megadott peremfeltételek Dirichlet peremfeltételek, azaz az ismeretlen függvény helyettesítési értékei vannak előírva a peremeken.

Tehát keressük azt a T függvényt, amelynek második deriváltja nulla, és $x=0$ helyen 10, $x=d=0.3$ helyen pedig a 20 értéket veszi fel. Az egyenletről ránézésre megállapítható, hogy általános megoldása egy egyenes a következő egyenlettel:

$$T(x) = ax + b$$

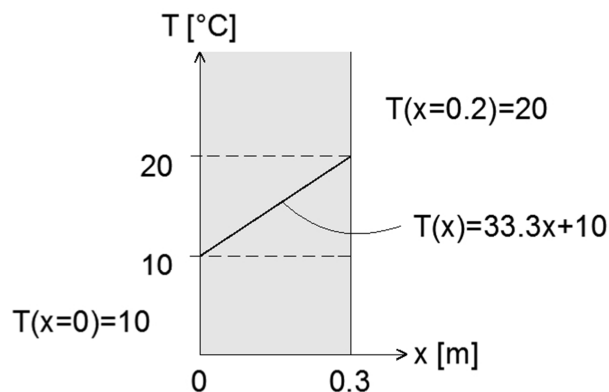
A konkrét megoldást a peremfeltételek behelyettesítésével kaphatjuk meg:

$$T(x=0) = a \cdot 0 + b = 10 \rightarrow b = 10$$

$$T(x=0.3) = a \cdot 0.3 + 10 = 20 \rightarrow a = 33\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow T(x) = 33\frac{1}{3}x + 10$$

Grafikusan ábrázolva:



Természetesen ennek a kiszámításához semmi szükség nem lett volna a stacioner hővezetés differenciálegyenletére, sokkal egyszerűbb pl. grafikus módszerekkel is elérhettük volna a célunkat. Mégis hasznos a példa, mert jól szemlélteti, hogy az összes egyszerű kézi vagy grafikus számítási módszer is végeredményben a hőtranszport mérlegegyenlet egy speciális megoldása. Továbbá érdemes lépésenként végiggondolni, hogy milyen feltételezésekkel és egyszerűsítésekkel élve tudtuk az első látásra bonyolult parciális differenciálegyenletet egy könnyen megoldható alakra hozni, és hogy meddig terjed ki ezeknek a feltételezéseknek az érvényességi köre. Ha például a falunkról hirtelen kiderülne, hogy mégsem teljesen homogén és izotróp, vagy a hővezetési tényezője mondjuk maga is hőmérsékletfüggő, vagy nem végtelen kiterjedésű az egyszerű számítások rögtön érvényüket vesztenék. Bizonyos esetben létezhetnek bonyolultabb analitikus megoldások, de a legtöbb általános esetben ez nem áll a rendelkezésünkre.

Ennek a tárgynak a témája a transzportfolyamatokat leíró mérlegegyenletek legáltalánosabb alakjának a numerikus megoldása. Ezekből elvileg már minden más speciális eset is levezethető lesz, de a numerikus módszerek használatának a lényege, hogy nem kell csak a különleges egyszerű esetekkel „beérnünk”.

2.2 Numerikus megoldás, numerikus módszerek

De mi is pontosan egy numerikus megoldás, vagy egy numerikus módszer?

2.2.1 A numerikus megoldás és a numerikus módszerek definíciója

Egy differenciálegyenletnek (közönséges vagy parciális) alapvetően kétféle megoldása lehet: analitikus vagy numerikus.

Az **analitikus**, vagy más néven zárt képlet szerinti **megoldás** egy olyan matematikai formula, ami csak jól ismert matematikai függvényeket és kifejezéseket tartalmaz (pl. $y(x) = \sin(x) + x \cos(x) + 2 + x^2 + \dots$) és a vizsgált értelmezési tartományon kielégíti azt. Az előző pontban bemutatott megoldása képpen kapott függvény T -re egy ilyen analitikus megoldás volt. A gyakorlatban azonban a legtöbb differenciálegyenletnek nincsen

analitikus megoldása. Azaz véges számú lépéssel ismert függvények felhasználásával nem tudunk felírni egy olyan matematikai kifejezést, ami kielégítené az egyenletet. (Bizonyos egyenleteknek egyáltalán semmilyen megoldása nincsen, de ilyenekkel most nem foglalkozunk)

Ha nem lehetséges, vagy egyszerűen túl bonyolult az analitikus megoldás levezetése, akkor még mindig megmentheti a helyzetet egy úgynevezett **numerikus megoldás**. Míg egy zárt képlet (egy függvény) az értelmezési tartományának minden egyes pontján végtelen nagy felbontással és pontossággal meghatározza a megoldást (hiszen a függvénybe bármilyen számot behelyettesíthetünk) egy numerikus megoldás pusztán a keresett ismeretlen függvény pontosan meghatározott véges számú helyen felvett közelítő értékét tartalmazza.

Például vegyünk az előző példában bemutatott közönséges differenciálegyenletet az $x \in (0, 0.3)$ értelmezési tartományon:

$$\lambda \frac{d^2 T}{dx^2} = 0$$

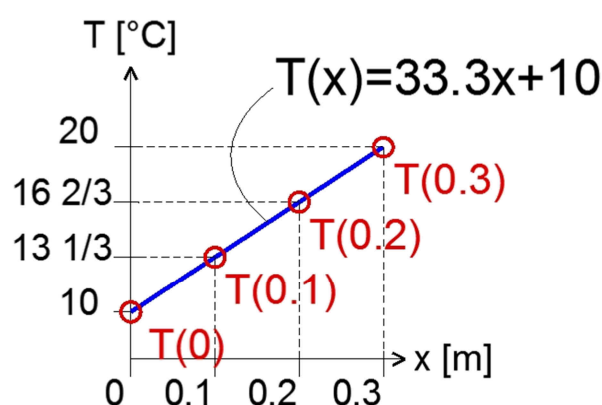
A peremfeltételek segítségével meghatározott analitikus megoldás:

$$T(x) = 33\frac{1}{3}x + 10$$

Ez a megoldás egy egyszerű matematikai kifejezéssel az értelmezési tartomány minden egyes pontjához egyértelműen hozzárendel egy értéket, és tökéletesen igaz rá az egyenlet.

Ugyanerre a közönséges differenciálegyenletre megadhatunk egy numerikus megoldást is, mely például a következő alakot veheti fel:

x	0	0.1	0.2	0.3
T	10	13 1/3	16 2/3	20



Ez a megoldás nem a teljes $x \in (0, 0.3)$ értelmezési tartományhoz, hanem csak 4 diszkrét ponthoz rendel hozzá és nem egy képletet, hanem csak 1-1 közelítő helyettesítési értéket. Amint látjuk ezek az értékek a jelen példában teljesen pontosak, a közölt öt pontban tökéletesen megegyeznek az analitikus megoldással. A valóságban általában nem tudunk ilyen pontosságot elérni numerikus megoldásokkal, ezért például a következő értékek is tekinthetők az differenciálegyenlet egy numerikus megoldásának:

x	0	0.1	0.2	0.3
T	10	13 332	16 664	20

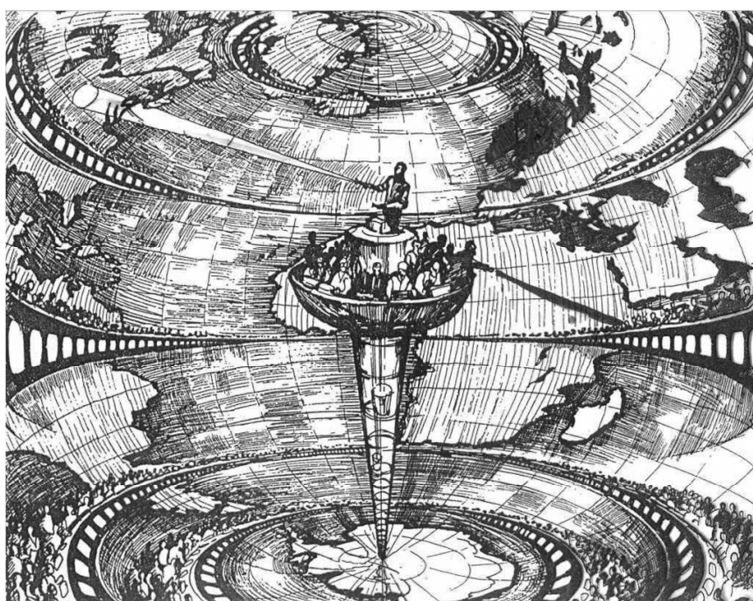
Ennek a megoldásnak az értékei már nem teljesen pontosan egyeznek meg az analitikus megoldással, de adott esetben elegendően pontosak lehetnek a céljainknak.

A numerikus megoldásokat az egyenletrendszer különféle algebrai átalakítása, deriválási szabályok alkalmazása, változók kiemelése, integrálása és hasonló műveletek helyett valamilyen **numerikus módszer** segítségével állítjuk elő. Gyakorlatilag ezt tekinthetjük magának a numerikus módszerek a definíciójának: bármilyen olyan eljárás mellyel kielégítő pontosságú közelítő numerikus megoldások találhatók a vizsgált egyenletre.

A megoldandó, a vizsgált tartomány egészére igaz zárt egyenlet megoldása helyett térben és/vagy időben diszkrét elemekre osztjuk az értelmezési tartományt, és ezekre a kis részekre írunk fel közelítő egyenleteket, ill. egy egyenletrendszert az eredeti egyenlet alapján, melynek megoldása a numerikus megoldás. Számos eltérő módszer létezik, melyek közül a **végelem**, a **véges differencia** és a **véges térfogat módszerek** a legismertebbek.

2.2.2 Kis „numerikus módszerek történelem”

A különféle differenciálegyenletek megoldása már jó ideje komoly problémát jelent a matematikusoknak, fizikusoknak és mérnököknek, ezért a numerikus módszerek ötlete sem új. Már akkor is alkalmaztak ilyen eljárásokat, amikor a „computer” még egy foglalkozás volt. Lewis Fry Richardson (1881-1953) 1922-ben megjelent könyvében (*Weather Prediction by Numerical Process* [5]), a korát messze megelőzve felvázolt egy „számító színházat”, ahol sok-sok „computer” (számításokat végző ember) egy gömb alakú épület belső felületén a Föld egy-egy kicsi zónájára végez meteorológiai számításokat. Minden egyes „computer” folyamatosan adatokat cserél a szomszédjaival. A kapott eredményeket a középső oszlop tetején ülők olvassák le, hogy csőpostával és telegrammal közvetítsék a rádióstúdiókba, hogy közhírré tehessék azokat. Ezzel a szükséges számítási kapacitás megjelenése előtt évtizedekkel bemutatta, hogy milyen lehetne egy numerikus időjárás előrejelző rendszer.



8. ábra Richardson időjárás előrejelző „számító színháza”

A numerikus módszerek igazi elterjedése azonban csak a megfelelő számítástechnikai kapacitás megjelenésével tudott ténylegesen megtörténni. A második világháború alatt a Manhattan terv égisze alatt az első atombombák tervezésénél szükséges numerikus számításokat kezdetben computer hölgyek végezték egyszerű kézi számológépekkel. Hamar felmerült azonban az ötlet, hogy a kor csúcstechnológiájának számító lyukkártyákkal vezérelt IBM mechanikai számológépeket (úgynevezett tabulátorokat) is bevonjanak a feladatba. Amíg a drága berendezések megérkeztek és össze lehetett állítani őket a számítási módszereket a hölgyekkel és a kézi számológépekkel tesztelték. Neumann János volt az egyik matematikus a programban aki élen járt az első numerikus módszerek kifejlesztésében. A véges differencia módszerek Neumann féle stabilitásvizsgálata azóta is az ő nevét őrzi.

Amikor végül üzembe álltak a tabulátorok is, a számító alakulatot irányító fizikusok, Richard Feynman és Nicholas Metropolis, nem tudták megállni, hogy legalább egyszer ne rendezzenek egy versenyt a gépek és az emberek között. Érdekes módon a humán csapat ugyanazt a sebességet tudta produkálni, mint a kezdetleges berendezések, természetesen azzal a különbséggel, hogy a hölgyek előbb utóbb elfáradtak, míg a gépek egész éjjel elzakatoltak, amíg csak ki nem fogytak lyukkártyákból vagy el pattant egy rugójuk vagy hasonló alkatrészük (ami elég gyakori eset volt).



9. ábra computer hölgyek a Los Alamos National Laboratory-ban a háború alatt amint az IBM tabulátorokat kezelik



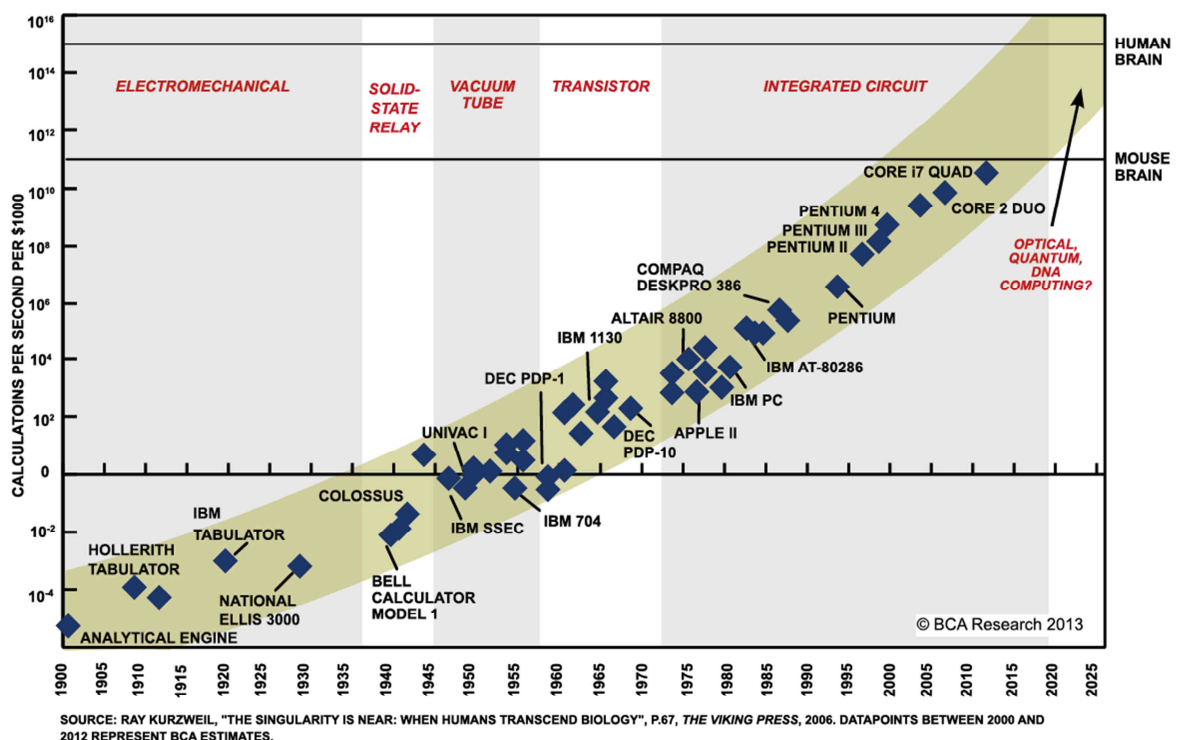
10. ábra balról jobbra: Neumann János, Richard Feynman és Nicholas Metropolis, a Los Alamosi igazolványképeiken

A digitális számítógépek kora a háború után érkezett el. Az első programozható digitális számítógép, az ENIAC, 1946 elejére készült el a Pennsylvanai Egyetemen és az egyik első feladata Teller Ede és Stanislaw Ulam az első hidrogénbomba tervezéséhez szükséges számításainak az elvégzése volt.



11. ábra balról jobbra: Teller Ede és Stanislaw Ulam a Los Alamosi igazolványképeiken

Jól látszik, hogy a fizikusok és a hadsereg azonnal felismerte a numerikus számítások fontosságát amint a hozzájuk szükséges technológiai elérhetővé vált. Azóta a fejlődés úgymond töretlen volt. A legelső próbálkozások óta mára egy külön tudományterület jött létre ezeknek a közelítő számításoknak a fejlesztésére. Az elmúlt néhány évtized abban hozott változást, hogy a számítástechnika fejlődésével matematikailag egyre bonyolultabb, vagy legalábbis egyre nagyobb számítás igényű modelleket tudunk megoldani egyre nagyobb sebességgel. Így lehetőség nyílik bonyolultabb rendszerek kezelésére, egyre több folyamat figyelembe vételére, a valós rendszerek reményeink szerint egyre hűbb leképezésére, mégpedig a nagyközönség számára is hozzáférhető számítógépeken. Ez nyitotta meg az utat az említett szimulációs „iparág” és egészen új kutatási területek létrejöttéhez többek között az építésben és azon belül az épületfizika területén is.



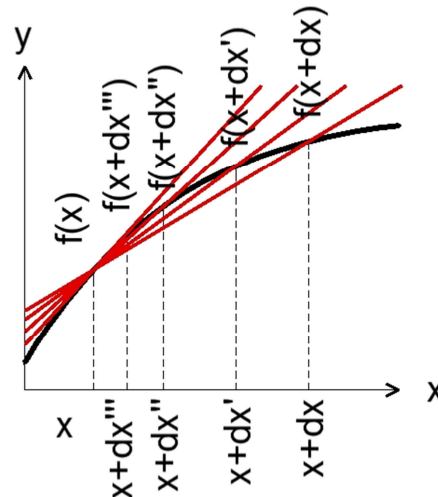
12. ábra Moor törvénye,

forrás: Ray Kurzweil: *The singularity is near: when humans transcend biology*, p.67, The Viking Press, 2006

2.3 Véges differenciák

A numerikus számítási módszerekkel való ismerkedésünket kezdjük az egyik legegyszerűbb módszerrel: a **véges differencia módszerrel**.

Amikor a gimnáziumban és az egyetemeken a deriválást először tanítják a határérték-számítás után általában rögtön ez az ábra szokott felkerülni a táblára:



Ha egy f függvény meredekségére vagyok kíváncsi egy adott x pontban, akkor azt közelíthetem az f függvény egy húrjának a meredekségével:

$$\text{meredekség} \cong \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx}$$

Azaz a meredekség közel azonos f x és $x + dx$ közötti megváltozása és dx hányadosával, ahol dx egy véges kicsi lépés az x tengely mentén. Ezt a hányadost neveztük **differenciahányadosnak**. Ahogy dx csökken a kapott húr meredeksége folyamatosan változik és tart f x -ben vett meredekségéhez. Innen már csak egy lépés volt bevezetni a derivált fogalmát, ami nem más, mint a differenciahányados határértéke amikor dx nullához tart. Ennek a határértéknek volt a neve a **differenciálhányados**:

$$f'(x) = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx}$$

A differenciahányados ezek után legtöbbször feledésbe is merült, hiszen az alap függvényeknek ismertek a deriváltjai és deriválási szabályai. De ahogy említettük a transzportfolyamatok differenciálegyenleteinek zárt képlet szerinti megoldása általában nem létezik ezért egy közelítő numerikus megoldást keresünk. A véges differencia módszer alap ötlete igen egyszerű: a „pontos” differencia hányados helyett elegendő lehet néhány diszkrét pontban meghatározni a deriváltat, mégpedig csak közelítő jelleggel: differenciál helyett differenciahányadosokkal számolva, ahol a dx lépést nem visszük el nullába, hanem meghagyjuk valamilyen véges kicsi értékűnek. Innen ered a módszer elnevezés: **véges differencia módszer**.

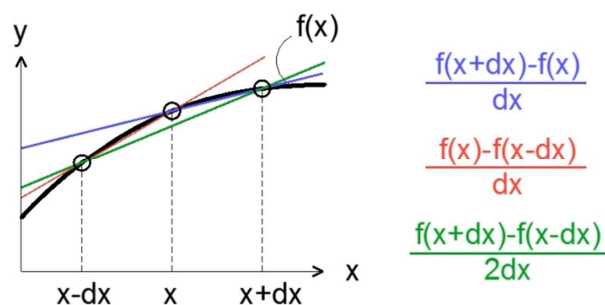
A legegyszerűbb elsőrendű véges differencia sémák, melyekkel egy függvény első deriváltját közelíthetjük:

$$f'(x) \equiv \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} \quad \text{az úgynevezett haladó differencia (forward difference)}$$

$$f'(x) \equiv \frac{f(x) - f(x-dx)}{dx} \quad \text{az úgynevezett retrográd differencia (backward difference)}$$

$$f'(x) \equiv \frac{f(x+dx) - f(x-dx)}{2dx} \quad \text{az úgynevezett centrális differencia (central difference)}$$

Ezeket a véges differencia sémákat a következő ábrával szemléltethetjük:



Mindhárom séma az $f(x)$ függvény x helyen vett deriváltját (meredekségét) adja meg közelítő módon. Jól látszik az ábrán ez a közelítő jelleg, hiszen mind a három módszerrel a függvény egy-egy húrját kapjuk meg, nem pedig a valódi érintőt. Az is érzékelhető, hogy ha a dx lépés kellően kicsi (de nem nulla!), akkor a valódi érintőhöz igen közeli eredményt kaphatunk.

A hővezetés differenciálegyenletében nem elsőrendű, hanem másodrendű deriváltak vannak, ezért másodrendű sémára is szükségünk lesz. Az elsőrendű haladó differencia séma segítségével igen könnyen belátható, hogy:

$$f''(x) \equiv \frac{f'(x+dx) - f'(x)}{dx}$$

Azaz $f(x)$ második deriváltja x helyen közelíthető egy haladó véges differenciával és $f(x)$ első deriváltjaival. Az első deriváltra azonban már felírtunk sémákat, így ezeket szintén kifejezhetjük egy-egy differencia hányadossal (esetünkben egy-egy retrográd differenciával).

$$f''(x) \equiv \frac{f'(x+dx) - f'(x)}{dx} = \frac{\frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} - \frac{f(x) - f(x-dx)}{dx}}{dx}$$

Egyszerűsítés után:

$$f''(x) \equiv \frac{f(x+dx) - 2f(x) + f(x-dx)}{dx^2}$$

2.4 A Taylor sor

A különböző véges differencia sémák különböző pontossággal közelítik a differenciáhányadost. A legfontosabb kérdés: milyen jó ez a közelítés, azaz mekkora a hiba? Ahhoz, hogy ezt meg tudjuk válaszolni még valamit át kell ismételnünk egykori matematikai tanulmányainkból. Ez lesz a Taylor sor.

Legyen $f(x)$ egy függvény, mely egy $x = a$ pontban végtelenszer deriválható. Tegyük fel, hogy ebben az a pontban ismerjük a függvény és deriváltjai értékét. Az $f(x)$ függvény a környezetében a következő sorozattal helyettesíthető:

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

A **Taylor sor** a függvény matematikai kifejezése egy végtelen hosszú összeggel. Az összeg egyes elemei rendre f n -edik deriváltjának a -ban vett értékét (ami egy-egy konstans), $(x-a)$ n -edik hatványát és a nevezőben n faktoriális (ami szintén egy-egy konstans) tartalmazzák. Tekintetbe véve, hogy egy függvény nulladik deriváltja maga a függvény, és nulla faktoriális definíció szerint¹, a Taylor sor első néhány elemét így írhatjuk fel:

$$T(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{6}(x-a)^3 + \dots$$

Felmerülhet a kérdés, mégis mire jó ez? Látszólag egy egyszerű matematikai kifejezést (az eredeti függvényünket) lecseréltük egy végtelen tagú összegre. Ha jobban megnézzük azonban, az így kapott sorozaton látszik, hogy az magát az f függvényt már nem tartalmazza sehol sem, csak a deriváltjának az a pontban vett értékeit. Tehát a Taylor sorral a környezetében le tudom írni f -et, úgy hogy csak az a pontban felvett értékeiről kell hogy információm legyen. A kapott kifejezéssel x -be behelyettesítve egy konkrét értéket megkaphatom f abban a pontban felvett értékét. Ha még mindig nem világos, hogy hol rejlik ennek az értelme, akkor nézzünk meg egy konkrét példát.

Az egyszerűség kedvéért a legyen egyenlő 0-val, azaz a 0 pontba írjuk fel a függvény Taylor sorát (a 0-ba felírt Taylor sort **Maclaurin sornak** nevezzük). A függvény pedig legyen az exponenciális függvény. Mivel az exponenciális függvény deriválása nem okozhat gondot könnyű dolgunk van:

$$f(x) = e^x$$

$$T(x) = \frac{e^0}{0!}(x-0)^0 + \frac{e^0}{1!}(x-0) + \frac{e^0}{2!}(x-0)^2 + \frac{e^0}{3!}(x-0)^3 + \dots$$

Egyszerűsítve:

$$T(x) = e^0 + e^0 x + \frac{e^0}{2} x^2 + \frac{e^0}{6} x^3 + \dots$$

Mivel $e^0 = 1$

$$T(x) = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + \dots$$

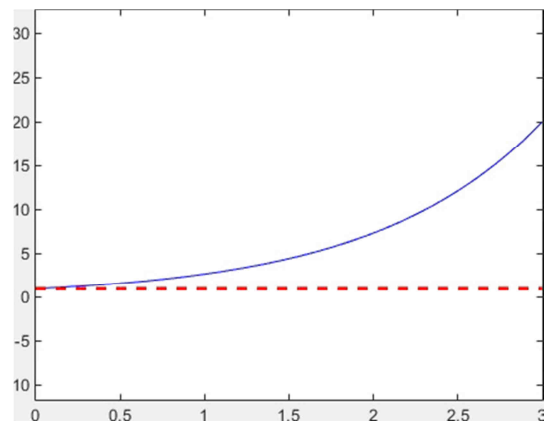
Azaz az exponenciális függvényt fel tudjuk írni 0 környékén egy olyan kifejezéssel, ami nem tartalmazza magát az exponenciális függvényt, csak hatványfüggvényeket. Végeredményben egy végtelen tagú polinomról van szó. A polinom egy olyan kifejezés, melyben csak számok és változók nemnegatív egész kitevőjű hatványainak szorzatai illetve összegei szerepelnek.

Belegondoltunk-e már, a zsebszámológépünk vajon hogyan számíthatja ki az exponenciális függvény, vagy például a trigonometrikus függvények értékeit? A válasz, hogy a Taylor sorral, Maclaurin sorral vagy más hasonló algoritmusokkal, melyek csak a mikroprocesszorok által elvégezhető egyszerű műveletekre építenek.

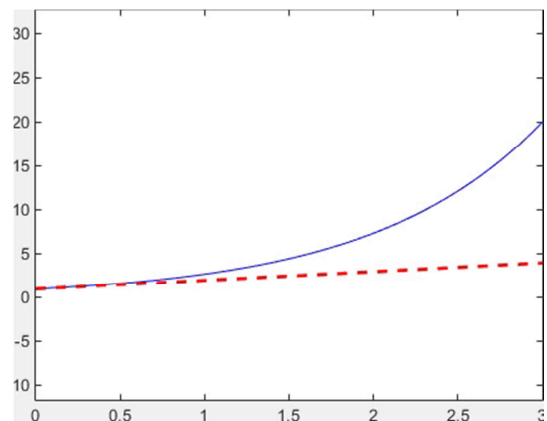
A gond csak ott van, hogy míg ezek a matematikai sorozatok végtelen elemből állnak, addig a leggyorsabb számítógép is csak véges számú műveletet tud elvégezni végesen rövid idő alatt. A megoldás erre, hogy a Taylor sornak nem az összes, hanem csak az első néhány elemét vesszük. Ezt nevezzük **Taylor polinom**nak. Az, hogy a sor összes többi elemét levágjuk (elhanyagoljuk) természetesen azzal a következménnyel jár, hogy a kapott eredmény nem lesz teljesen pontos.

Az előző $f(x) = e^x$ példánál maradva vizsgáljuk meg, hogy egy Taylor polinom milyen jó közelítést ad $a = 0$ környékén, ha a sor első néhány elemét vesszük:

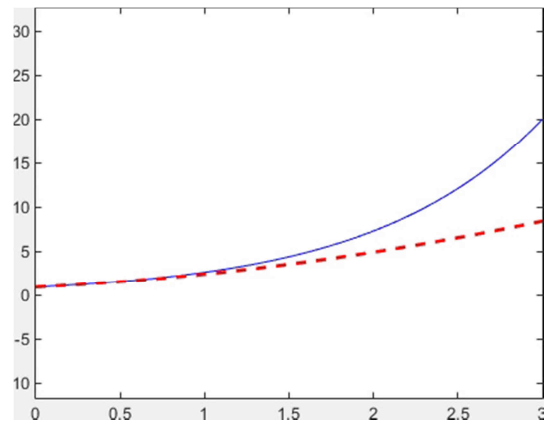
$n=0$, tehát: $T(x) = 1$



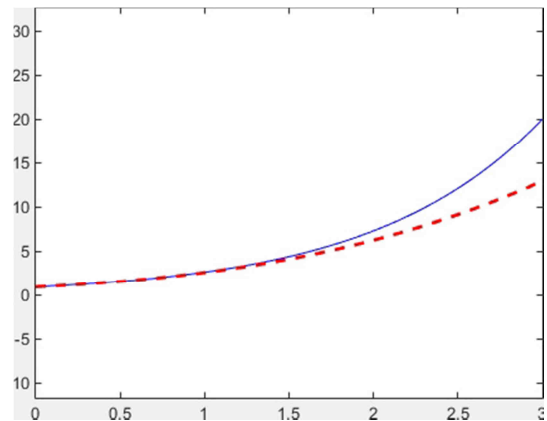
$n=1$, tehát: $T(x) = 1 + x$



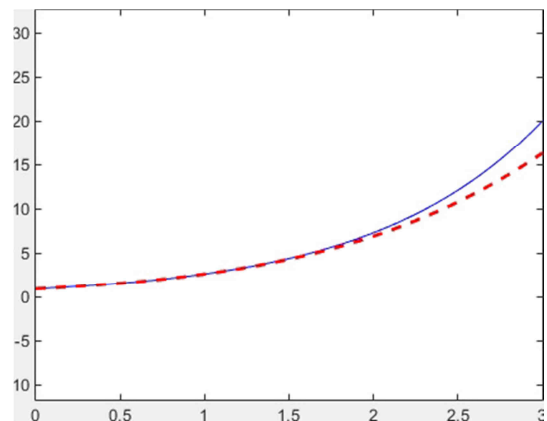
$$n=2, \text{ tehát: } T(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$$



$$n=3, \text{ tehát: } T(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$$



$$n=4, \text{ tehát: } T(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4$$



Ezt így folytathatnánk a végtelenségig, de inkább álljunk meg ezen a ponton. A teljes Taylor sorból a hatodik elemet, mely egy $c \cdot x^5$ -es tagot tartalmazott volna (ahol c egy konstans) így „levágtuk”, ahogy minden utána következő elemet is. Ha megfigyeljük a grafikont az első öt elem már eléggé pontos közelítést adott (legalábbis szemmértékkel) 0-tól egészen körülbelül 1.5-ig. Ha tényleg csak $x = 0$ közvetlen környezetében érdekel minket az eredmény, mondjuk 0.1-ben, a hatodik tag hozzáadásával már csak vajmi keveset változna az eredmény. Miért is? Mert a hatodik tag értéke rendkívül kicsi lenne, hiszen $x = 0.1$ -ben $x^5 = 0.1^5 = 0.00001$ -ot tartalmazná. Minden további tag még nagyobb hatványokat tartalmaz, és mint ilyen még inkább elhanyagolható.

Ezt a felismerést matematikailag így fejezhetjük ki:

$$f(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + O(x^5)$$

Lefordítva: a Taylor polinom első öt eleme nem teljesen „pontos”, és a végén tartalmaz egy hibatagot $O(x^5)$, mely értéke ebben az esetben x ötödik hatványával arányos. Ezt nevezzük **közelítési hibának** (angolul truncation error, azaz levágási hiba). Ha a közelítési hiba ötöd rendű mint a példánkban, az x csökkentésével a hiba x ötödik hatványával arányosan csökken. Fontos megjegyezni, hogy a közelítési hiba rendje önmagában semmit nem mond a hiba abszolút értelemben vett nagyságáról, csak azt mutatja meg, hogy az x csökkentésével milyen gyorsan csökken.

2.5 A másodrendű véges differencia alapséma hibája

A Taylor sorról átismételvek alapján próbáljuk meghatározni, hogy hanyad rendű a

$$f''(x) \cong \frac{f(x+dx) - 2f(x) + f(x-dx)}{dx^2}$$

másodrendű véges differencia séma hibája! (Fontos: a differencia séma rendje azt fejezi ki, hogy hanyadik deriváltat közelít, nem összekeverendő a hibának a rendjével, ami az előző fejezetben ismertettünk). Ehhez a Taylor sorfejtést fogjuk felhasználni. Emlékeztetésül a Taylor sor általános alakja:

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

Írjuk fel $f(x+dx)$ értékét az f függvény $a = x$ pontban felírt Taylor sora segítségével.

És a mi konkrét esetünkben $a = x$, és mi $x = x + dx$ pontban keressük f értékét.

$$f(x+dx) = f(x) + \frac{f'(x)}{1}(x+dx-x) + \frac{f''(x)}{2}(x+dx-x)^2 + \frac{f'''(x)}{6}(x+dx-x)^3 + \frac{f^{(4)}(x)}{24}(x+dx-x)^4 + \dots$$

Egyszerűsítve:

$$f(x+dx) = f(x) + dx f'(x) + \frac{dx^2}{2} f''(x) + \frac{dx^3}{6} f'''(x) + \frac{dx^4}{24} f^{(4)}(x) + \dots$$

Ugyanígy írjuk fel $f(x-dx)$ értékét is az f függvény $a = x$ pontban felírt Taylor sora segítségével. Tehát $a = x$, és mi $x = x - dx$ pontban keressük f értékét.

$$f(x-dx) = f(x) + \frac{f'(x)}{1}(x-dx-x) + \frac{f''(x)}{2}(x-dx-x)^2 + \frac{f'''(x)}{6}(x-dx-x)^3 + \frac{f^{(4)}(x)}{24}(x-dx-x)^4 + \dots$$

Egyszerűsítve:

$$f(x-dx) = f(x) - dx f'(x) + \frac{dx^2}{2} f''(x) - \frac{dx^3}{6} f'''(x) + \frac{dx^4}{24} f^{(4)}(x) + \dots$$

Most már felírhatjuk, hogy mivel is egyezik meg a megvizsgálandó véges differencia kifejezésünk. Csak annyit kell tennünk, hogy $f(x + dx)$ és $f(x - dx)$ helyére behelyettesítjük az ezekre az imént felírt kifejezéseket.

$$\frac{f(x + dx) - 2f(x) + f(x - dx)}{dx^2} = \frac{1}{dx^2} \left[\begin{aligned} &\left(f(x) + dx f'(x) + \frac{dx^2}{2} f''(x) + \frac{dx^3}{6} f'''(x) + \frac{dx^4}{24} f^{(4)}(x) \dots \right) \\ &- 2f(x) \dots \\ &+ \left(f(x) - dx f'(x) + \frac{dx^2}{2} f''(x) - \frac{dx^3}{6} f'''(x) + \frac{dx^4}{24} f^{(4)}(x) \dots \right) \end{aligned} \right]$$

Végezzük el az egyszerűsítéseket:

$$\frac{f(x + dx) - 2f(x) + f(x - dx)}{dx^2} = \frac{1}{dx^2} \left[\begin{aligned} &\left(\cancel{f(x)} + \cancel{dx f'(x)} + \frac{dx^2}{2} f''(x) + \cancel{\frac{dx^3}{6} f'''(x)} + \frac{dx^4}{24} f^{(4)}(x) \dots \right) \\ &\cancel{-2f(x)} \dots \\ &+ \left(\cancel{f(x)} - \cancel{dx f'(x)} + \frac{dx^2}{2} f''(x) - \cancel{\frac{dx^3}{6} f'''(x)} + \frac{dx^4}{24} f^{(4)}(x) \dots \right) \end{aligned} \right]$$

Tehát:

$$\frac{f(x + dx) - 2f(x) + f(x - dx)}{dx^2} = \frac{1}{dx^2} \left[dx^2 f''(x) + \frac{dx^4}{12} f^{(4)}(x) \right] = f''(x) + \frac{dx^2}{12} f^{(4)}(x) \dots$$

Mit is kaptunk? A vizsgált másodrendű véges differencia séma x pontba felírva nem mással egyenlő, mint $f''(x)$ azaz a keresett pontos megoldás és a Taylor sor jellege miatt további végtelen számú tag összegével, melyek közül az első és legnagyobb ebben a konkrét esetben $\frac{dx^2}{12} f^{(4)}(x)$. Tehát a hiba függ a keresett

függvény negyedik deriváltjának értékétől (hogy ez mekkora az az adott függvény jellegétől függ) és dx^2 -től. Mivel a keresett függvény minden esetben más jellegű lehet, ezért a negyedik derivált hatása nem megbecsülhető előre, viszont dx csökkentésével csökkenthetjük a hibát. Az előző alfejezet végén bevezetett jelölésmódot felhasználva:

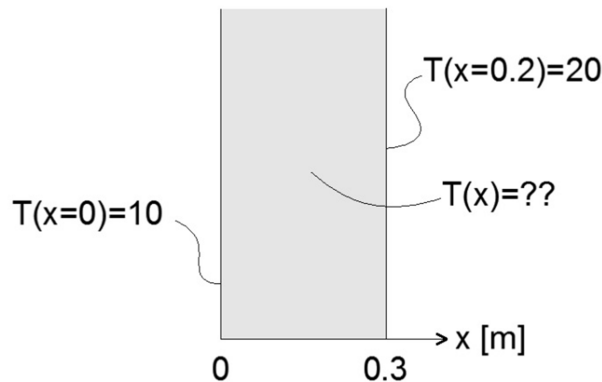
$$\frac{f(x + dx) - 2f(x) + f(x - dx)}{dx^2} = f''(x) + O(dx^2)$$

Azaz a séma egyenlő a pontos megoldással és a Taylor sor levágása miatti hibataggal, ami dx második hatványával arányos. **Tehát a bemutatott séma hibája másodrendű**, másképp megfogalmazva a séma másodrendűen pontos.

A gyakorlatban mit fog ez nekünk jelenteni? Amikor például a hővezetés egyenletének egy numerikus megoldását fogjuk keresni a véges differencia módszerrel és a bemutatott másodrendű véges differencia sémával, akkor a numerikus háló sűrítésekor, azaz dx csökkentésekor, a numerikus megoldásunk hibája dx^2 -el arányosan fog csökkenni. A numerikus módszereknél egy másodrendű hiba általában már elfogadható, mert a háló sűrítésével kellően gyorsan fog csökkenni, és így nem kell túlságosan sűrű hálókat alkalmazni. Szükség esetén természetesen lehet más sémákat is konstruálni, melyek hibátagja még nagyobb rendű, bár ezek általában egyre bonyolultabb összefüggéseket eredményeznek.

2.6 Egy konkrét példa

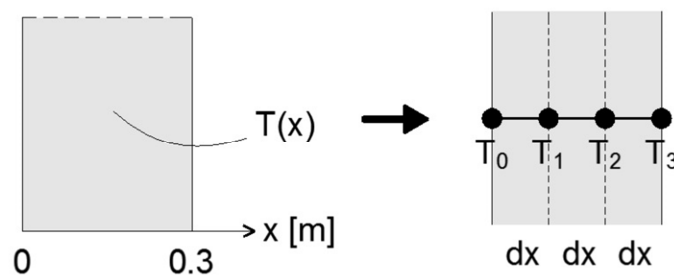
Hogy a fejezetben tárgyaltak világosabbak legyenek próbáljuk megoldani a fejezet elején bemutatott egyszerű példát véges differencia módszerrel. Ismétlésként:



A fal vastagsága legyen $d=30$ [cm], anyagában teljesen homogén és izotróp, hővezetési tényezője pedig $\lambda=1$ [W/mK]. Külső és a belső felülete legyen egyaránt izoterm, kívül $T(x=0)=10$ [°C] belül pedig $T(x=d)=20$ [°C] felületi hőmérsékletű. Mivel ilyen egyszerű feladatot tűztünk ki magunknak a stacioner hővezetés parciális differenciálegyenletét egyszerűsíteni tudjuk és a megoldandó egyenlet:

$$\lambda \frac{d^2 T}{dx^2} = 0$$

Mivel most nem a zárt képlet szerinti megoldást keressük, hanem egy numerikus megoldást akarunk előállítani a falat mint kontinuumot fel kell bontsuk véges kicsi egységekre. Hogy a felírandó egyenletek könnyen átláthatóak legyenek osszuk a faalt mindössze három egyenlőre részre, a hőmérsékletet pedig nem minden pontban fogjuk megkeresni, hanem csak a felosztás három elemének a határain. Ezeket a pontokat nevezzük csomópontoknak és mindegyiknek adjunk egy egyszerű azonosítót nullától háromig:



A hőmérsékletet ezekben a csomópontokban fogjuk keresni, tehát végeredményben T_0, T_1, T_2, T_3 értékeire vagyunk kíváncsiak. Olyan T értékekre van szükségünk, amik teljesítik a stacioner hővezetés differenciálegyenletét. A feladatban megadott peremfeltételeink úgy szólnak, hogy a fal bal oldalán a hőmérséklet 10°C , míg a jobb oldalán 20°C , tehát T_0 -t és T_3 -t rendre egyenlővé tehetjük 10-el és 20-al. A stacioner hővezetés differenciálegyenletére keresünk egy közelítő megoldás, ezért felhasználhatjuk a másodrendű deriváltakat közelítő parciális differencia sémát, melynek minden pontban nullát kell adnia. Így felírhatjuk a következő 4 egyenletet:

$$T_0 = 10$$

$$\lambda \left(\frac{T_0 - 2T_1 + T_2}{dx^2} \right) = 0$$

$$\lambda \left(\frac{T_1 - 2T_2 + T_3}{dx^2} \right) = 0$$

$$T_3 = 20$$

Az első és az utolsó egyenlet a peremfeltételeket tartalmazzák, míg a második és a harmadik egyenletek rendre az 1-es és 2-es pontokba felírt másodrendű véges differencia sémák, melyek a hővezetés egyenletét hivatottak közelíteni. Mivel T_0 és T_3 ismertek helyettesítsünk be velük és végezzünk el néhány egyszerűsítést:

$$\frac{\lambda}{dx^2} 10 - \frac{2\lambda}{dx^2} T_1 + \frac{\lambda}{dx^2} T_2 = 0$$

$$\frac{\lambda}{dx^2} T_1 - \frac{2\lambda}{dx^2} T_2 + \frac{\lambda}{dx^2} 20 = 0$$

Tehát végeredményben egy kétismeretlenes lineáris egyenletrendszert kaptunk két egyenlettel. A peremfeltételek behelyettesítésével csak azokra a csomópontokra maradt egyenletünk ahol T értéke ismeretlen. Tehát ha n ismeretlenünk lenne (ha n darabra osztjuk a falat), akkor pontosan n egyenletet kapnánk. Az hogy az egyenletek lineárisak annyit jelent, hogy az egyes ismeretlenek mindig az első hatványon szerepelnek benne és csak konstansokkal vannak megszorozva ($\lambda=1$, dx pedig 0.1 az esetünkben, csak egyelőre nem helyettesítettük be őket). Ezt az egyenletrendszert kézzel is igen könnyen meg tudnánk oldani, és nemsokára ezt is fogjuk tenni. Amikor majd a számítógépet használjuk fel ennél sokkal bonyolultabb problémákra, akkor is végeredményben egy ilyen egyenletrendszert fog „felírni” a gép, csak sokkal több taggal, A lineáris algebra és a numerikus módszerek fejlődésével számos igen hatékony algoritmust fejlesztettek az ilyen egyenletek megoldására.

Az egyenletrendszer megoldásához rendezzük azt át úgy, hogy az ismeretlenek maradjanak a baloldalon, míg a konstansok kerüljenek a jobb oldalra:

$$-\frac{2\lambda}{dx^2} T_1 + \frac{\lambda}{dx^2} T_2 = -\frac{\lambda}{dx^2} 10$$

$$\frac{\lambda}{dx^2} T_1 - \frac{2\lambda}{dx^2} T_2 = -\frac{\lambda}{dx^2} 20$$

Ugyanez mátrix formában:

$$\begin{bmatrix} -\frac{2\lambda}{dx^2} & \frac{\lambda}{dx^2} \\ \frac{\lambda}{dx^2} & -\frac{2\lambda}{dx^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\lambda}{dx^2} 10 \\ -\frac{\lambda}{dx^2} 20 \end{bmatrix}$$

Adjuk hozzá a második sorhoz az első sor $\frac{1}{2}$ szeresét:

$$\begin{bmatrix} -\frac{2\lambda}{dx^2} & \frac{\lambda}{dx^2} \\ 0 & -\frac{3\lambda}{2dx^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\lambda}{dx^2} 10 \\ -\frac{\lambda}{dx^2} 20 + \frac{1}{2} \frac{\lambda}{dx^2} \end{bmatrix}$$

Behelyettesítve λ és dx konkrét értékeit:

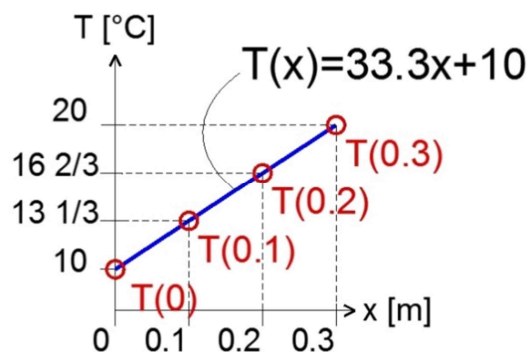
$$\begin{bmatrix} -200 & 100 \\ 0 & -150 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1000 \\ -2500 \end{bmatrix}$$

Amiből egyszerű visszahelyettesítéssel könnyen levezethető, hogy:

$$T_2 = 16.66$$

$$T_1 = 13.33$$

Ami maga a probléma numerikus megoldása. Grafikonon ábrázolva:



Tehát ebben a konkrét példában sikerült egy olyan numerikus megoldást előállítani, ami (az adott csomópontokban) tökéletesen megegyezik a fejezet elején levezetett analitikus megoldással. Hogy lehetséges ez, amikor azt mondtuk, hogy a véges differenciák csak közelítést adják differenciálhányadosnak (deriválnak), és a Taylor sor segítségével is bebizonyítottuk, hogy az alkalmazott sémának van egy másodrendű hibája?

A válasz a rendkívül egyszerű feladat jellegében rejlik. Az analitikus megoldással megmutattuk, hogy a tényleges megoldás T -re egy egyenes, egy lineáris függvény, ami csak egy konstans és x első hatványát tartalmazza. A séma hibájának levezetésében pedig megmutattuk, hogy a Taylor sor levágott elemei közül az első:

$$\frac{dx^2}{12} f'''(x)$$

Illetve a konkrét esetben:

$$\frac{dx^2}{12} T'''(x)$$

Azaz T negyedik deriváltját tartalmazza. Mivel T jelen esetben valójában egy egyenes a negyedik deriváltja már mindenütt nulla, ahogy minden további magasabb rendű deriváltja is, így a Taylor sor összes levágott eleme nulla, tehát a differenciál séma kivételesen a teljesen pontos eredményt szolgáltatja. Sajnos ez gyakorlatilag egyik bonyolultabb feladatnál sem lesz így (a hőmérséklet mező nem egy egyenessel vagy egy síkkal írható le), ezért a hibátag sem lesz nulla.

3 Többdimenziós stacioner hővezetés – hőhídszimuláció gyakorlat



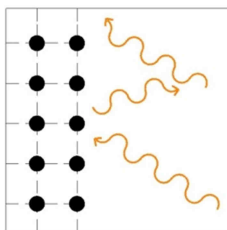
4 Transzparens szerkezetek hőtechnikai modellezése - elmélet

A transzparens szerkezetek hőtechnikai leírásához az azokban lejátszódó egyes hőátviteli folyamatok leírására van szükség. Ezek a következők:

- hővezetés a szilárd üvegrétegekben
- hosszuhullámú infravörös sugárzásos hőátadás az egyes üvegrétegek között, illetve a külső és belső felület és a környezet között
- a rövidhullámú infravörös (szoláris) sugárzás komplex interakciója az üvegrétegekkel, bevonatokkal, fóliákkal. Az üveg külső felületére beeső sugárzás átbocsájtott és az egyes üvegrétegekben elnyelt hányadának a számítása.
- konvektív hőátadás az egyes üvegek közötti légréseken keresztül, illetve a külső és belső felület és a környezet levegője között

Ahhoz hogy nekikezdjünk ennek a feladatnak a szükséges fizikai háttérrel kell először megismerkedni.

4.1 Hősugárzás alapismeretek



Minden anyag mely abszolút nulla fok feletti hőmérsékletű (> 0 [K]) sugárzást bocsájt ki a töltéssel rendelkező részecskéik (elektronok és protonok) rendezetlen hőmozgása miatt. Ezt a jelenséget nevezzük **hőmérsékleti sugárzásnak**, melynek néhány alapvető tulajdonsága:

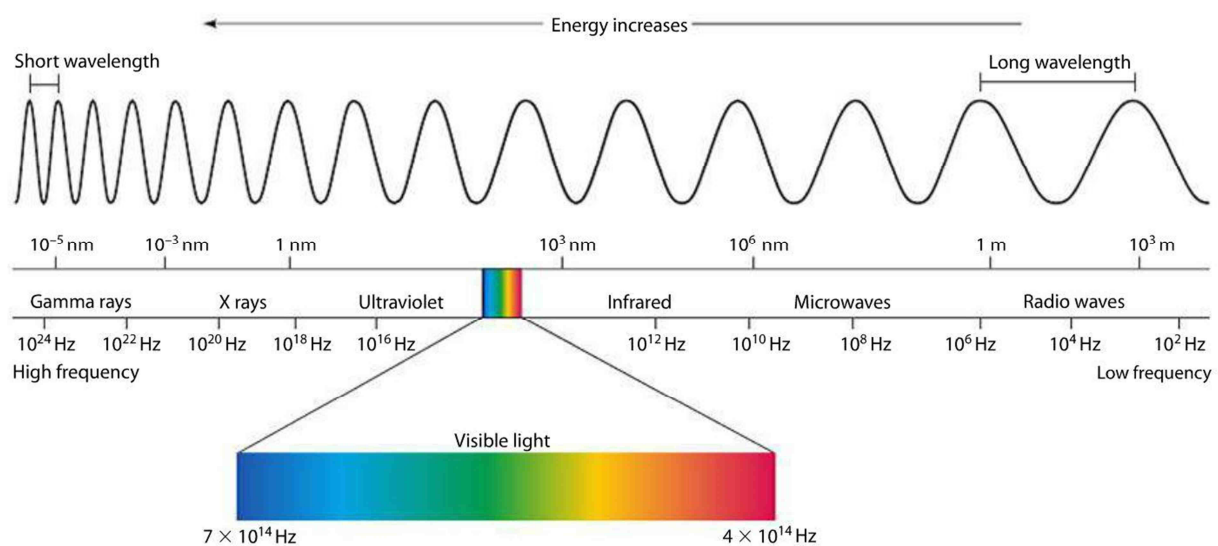
- a kibocsájtott sugárzás elektromágneses sugárzás, tehát:
 - o fotonokból áll
 - o a fény sebességével terjed ($c=2.99e8$ [m/s] vákuumban)
 - o nem igényel közvetítő közeget
 - o a sugárzás frekvenciája és hullámhossza közötti kapcsolat: $f\lambda = c$ (ahol c a fénysebesség: $2.99e8$ [m/s] vákuumban)

- o a fotonok energiája a hullámhossz v. a frekvencia függvénye:

$$E = \frac{hc}{\lambda} = hcf \text{ (ahol } h \text{ a Planck állandó: } 6.625 \cdot 10^{-34} \text{ [J/s])}$$

- kisugárzás a tér minden irányába
- a kisugárzott energia időegységre vett értéke és hullámhossz szerinti eloszlása az anyag abszolút hőmérsékletétől és az anyagszerkezettől függ
- a kisugárzott energia nem függ a környezettől, pl. hogy milyen más hőmérsékletű testeket, felületeket „lát” az anyag
- szilárd a sugárzás számára átlátszatlan anyagok esetében alapvetően felületi jelenségről van szó. A hőmérsékleti sugárzás kibocsátása (és elnyelése) a felület közvetlen környezetében történik, ezért alapvetően a felület anyagszerkezete határozza meg.

4.1.1 Az elektromágneses sugárzás spektrum



13. ábra Az elektromágneses spektrum

Az elektromágneses spektrum az épületfizika szempontjából „érdekes” tartományai a hullámhossz határaikkal:

- UV sugárzás: $10 \text{ [nm]} < \lambda < 380 \text{ (400) [nm]}$
 - o UV C: $100 \text{ [nm]} < \lambda < 280 \text{ [nm]}$
 - o UV B: $280 \text{ [nm]} < \lambda < 315 \text{ [nm]}$
 - o UV A: $315 \text{ [nm]} < \lambda < 380 \text{ [nm]}$

A Napból érkező sugárzás energiatartalmának egy része az UV sugárzás hullámhossztartományába esik. Az UV C sugárzást (legkisebb hullámhossz, legnagyobb frekvencia, tehát legnagyobb energia) szinte teljesen kiszűri a légkör, míg az UV B és A sugárzásból (a látható tartomány fele közelítve) egyre több éri el a felszínt.

- látható sugárzás: $380 \text{ (400) [nm]} < \lambda < 780 \text{ [nm]}$
A Napból érkező sugárzás energiatartalmának körülbelül fele ebbe a hullámhossztartományba esik.
- rövidhullámú infravörös sugárzás: $780 \text{ [nm]} < \lambda < 2500 \text{ (3000) [nm]}$
A Napból érkező (szoláris) sugárzás energiatartalmának valamivel kevesebb mint fele ebbe a már nem látható hullámhossztartományba esik.
- hosszúhullámú sugárzás: $2500 \text{ (3000) [nm]} < \lambda < 40000 \text{ (50000) [nm]}$
Az épületekben tapasztalt átlagos hőmérsékleteken a hőmérsékleti sugárzás ebbe a tartományba esik.

4.1.2 Abszolút fekete testek hőmérsékleti sugárzása

Az **abszolút fekete test** olyan elméleti test, mely minden rá érkező sugárzást tökéletesen elnyel. Az abszolút fekete test önmaga is sugároz, mégpedig minden létező hullámhosszon egyszerre, csak nem egyenletes intenzitással. Az abszolút fekete test a tér minden irányába ugyanolyan intenzitással sugároz (a kisugárzása nem irányfüggő). Ezt a fajta sugárzást nevezzük **diffúz sugárzásnak**.

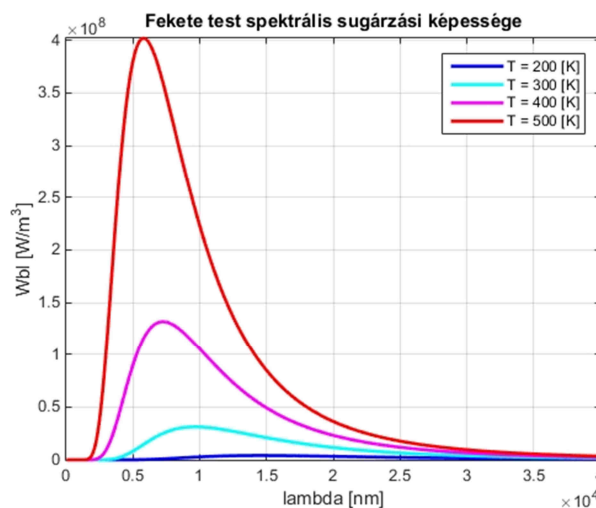
Planck törvénye írja le, hogy hogyan függ egy abszolút fekete test által kibocsátott sugárzás annak hőmérsékletétől, és hogy milyen a hullámhossz szerinti eloszlása:

$$e_f(\lambda, T) = \frac{\pi 2 h c^2}{\lambda^5 (e^{hc/\lambda k_B T} - 1)}$$

ahol:

e_f	[W/m ³] az abszolút fekete test spektrális emissziós képessége (angolul spectral black emissive power)
h	[J/s] a Planck állandó, értéke 6.625e-34
c	[m/s] a fénysebesség, értéke vakumban 2.99e8 [m/s]
λ	[m] a hullámhossz
k_B	[J/K] a hullámhossz
T	[K] az abszolút hőmérséklet

A **spektrális emissziós képesség** azt mutatja meg, hogy az adott fekete test mennyi energiát sugároz ki egy időegység alatt (avagy mekkora teljesítménnyel sugároz) egy egységnyi felületen egy egységnyi hullámhossztartományban. Planck törvényét a következő ábra mutatja be a legszemléletesebben:



14. ábra Planck törvénye

Az ábrán az egyes színek különböző hőmérsékleteknek felelnek meg. A grafikonon úgy tűnik, mintha a görbék nullából indulnának ki, de valójában minden nulla feletti hullámhosszban felvesznek legalább egy nagyon kicsi értéket (a nulla hullámhosszon ahogy a képletben is látszódik nincsenek értelmezve). Egy adott pontnál aztán mindegyik görbe meredeken emelkedni kezd, elér egy maximumot, majd aszimptotikusan ismét csökkenni kezd a nulla felé. A nagyobb hőmérsékletek görbéje nagyobb maximális értéket vesz fel, a maximális értéke kisebb hullámhosszhoz tartozik, és a görbe alatti terület is nagyobb. A hőmérséklet csökkenésével a görbék egyre jobban ellaposodnak, így az alattuk lévő terület is csökken, míg a maximumponthoz tartozó hullámhossz eltolódik a nagyobb hullámhosszak irányába.

A maximális energiakibocsátáshoz tartozó hullámhossz hőmérsékletfüggő eltolódását az ún. **Wien féle eltolódási törvény** írja le:

$$\lambda_{\max} T = 2898 [\mu\text{m}]$$

ahol:

$$\begin{array}{ll} \lambda_{\max} & [\mu\text{m}] \text{ a maximális energiakibocsátáshoz tartozó hullámhossz} \\ T & [\text{K}] \text{ az abszolút hőmérséklet} \end{array}$$

A képlet ugyanazt az eredményt adja amit az imént a grafikonon is láttunk: ahogy növeljük a hőmérsékletet, a maximális teljesítményhez tartozó hullámhossz egyre inkább rövidül, és fordítva. A nap felülete körülbelül 5778 [K], tehát hőmérsékleti sugárzással a legnagyobb teljesítményt körülbelül a 0.5 μm -es hullámhosszon adja le, ami pont a látható spektrum közepébe esik. Ehhez képest egy szobahőmérsékletű test, körülbelül 293 [K] hőmérsékleten nagyjából 10 μm -en adja le a legtöbb energiát, ami pedig egyértelműen a hosszúhullámú infravörös tartományba tartozik. A világítástechnikát és a tűzvédelmet leszámítva az épületfizikai gyakorlatban előforduló hőmérsékleteken az egyes testek által hőmérsékleti sugárzással kibocsátott energia elfogadható közelítéssel 100%-ban a hosszúhullámú infravörös tartományba esik. Az UV, látható és rövidhullámú infravörös tartományokkal csak a szoláris sugárzással kapcsolatos jelenségeknél kell foglalkoznunk. Ennek megfelelően a majd a későbbiekben bevezetendő sugárzástechnikai jellemzők között is két fő csoportot szoktunk megkülönböztetni: a szoláris és a hosszúhullámú infravörös jellemzőket (illetve hármát, hogyha a látható hullámhossztartományt is különvesszük).

Azt, hogy egy testnek összességében mennyi a sugárzási teljesítménye a spektrális emissziós képesség görbék alatti terület integrálásával kaphatjuk meg. Ezt szerencsére általában nem kell ténylegesen megtennünk, mivel ennek az integrálnak az értékét a Stefan-Boltzmann törvény segítségével is megkaphatjuk:

$$E_f(T) = \int_0^{\infty} e_f(\lambda, T) d\lambda = \sigma T^4$$

Röviden:

$$E_f(T) = \sigma T^4$$

ahol:

$$\begin{array}{ll} E_f & [\text{W/m}^2] \text{ az abszolút fekete test emissziós képessége (black emissive power)} \\ \sigma & [\text{W/m}^2\text{K}^4] \text{ a Stefan-Boltzmann állandó, értéke } 5.669\text{e-}8 \\ T & [\text{K}] \text{ az abszolút hőmérséklet} \end{array}$$

Az **abszolút fekete test emissziós képessége** az általa hőmérsékleti sugárzással kibocsátott teljesítményt adja meg egységnyi felületen. Az épületfizikában a hosszúhullámú infravörös sugárzás számításánál általában nem érdekelt minket a kibocsátott energia hullámhosszfüggése, ezért ahol csak lehet ezzel a sokkal egyszerűbb összefüggéssel számolunk.

4.1.3 Szürke testek hőmérsékleti sugárzása

A valóságban nem léteznek abszolút fekete testek. A valódi anyagok nem teljesen tökéletesen nyelnek el minden rájuk érkező energiát, és az abszolút fekete testhez képest minden hullámhosszban valamennyivel kevesebbet

sugároznak ki. Ha a hullámhossz függvényében összevetjük egy szürke és egy abszolút fekete test emissziós képességét, akkor megkapjuk az úgynevezett **relatív emissziós tényezőt**:

$$\varepsilon(\lambda, T) = \frac{e(\lambda, T)}{e_f(\lambda, T)}$$

ahol:

ε	[-] a relatív emissziós tényező
e	[W/m ³] a szürke test spektrális emissziós képessége
e_f	[W/m ³] az abszolút fekete test spektrális emissziós képessége

Az emissziós tényező minden egyes hullámhossz és hőmérséklet érték mellett megadja, hogy a szürke test az elméleti abszolút fekete test hőmérsékleti sugárzási teljesítményének mekkora részét adja le. Amint már említettük, legalábbis a hosszuhullámú infravörös sugárzásnál, nem érdekel minket a hullámhossz függőség, ezért az emissziós tényezőt egyetlen számmal is kifejezhetjük a hosszuhullámú infravörös sugárzás teljes hullámhossztartományára integrálva:

$$\varepsilon(T) = \frac{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} e(\lambda, T) d\lambda}{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} e_{fekete}(\lambda, T) d\lambda}$$

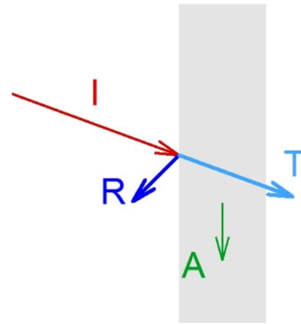
Ez az integrált emissziós tényező, melynek az épületfizikai gyakorlatban a hőmérséklet függését is elhanyagoljuk, mert az általunk vizsgált hőmérsékleteken ez a függés eleve is gyakorlatilag elhanyagolható. Az épületfizikai gyakorlatban megegyezés szerint az így kapott értéket **hosszuhullámú emissziós tényezőnek** nevezzük: ε [-].

Ez alapján egy szürke test által kibocsájtott teljes hőmérsékleti sugárzás teljesítmény egy egységnyi felületre a Stefan-Boltzmann törvény alapján:

$$E_{szürke}(T) = \varepsilon \sigma T^4$$

4.1.4 Átbocsájtás, elnyelés, visszaverés

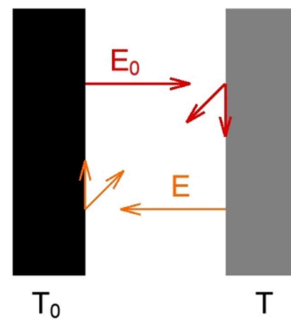
Amikor egy testet sugárzás ér, akkor a beeső sugárzása hullámhossza, beesési szöge és az adott test (anyag) sugárzástechnikai jellemzőinek függvényében az részben átjut a testen (transzmisszió), részben elnyelődik a testben (abszorpció) és részben visszaverődik (reflexió).



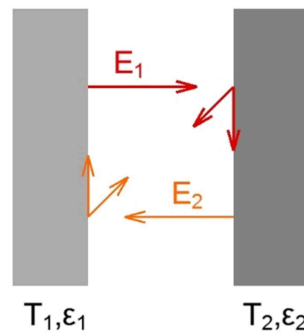
$$I = A + T + R$$

$$1 = \frac{A}{I} + \frac{T}{I} + \frac{R}{I} = \alpha + \tau + \rho$$

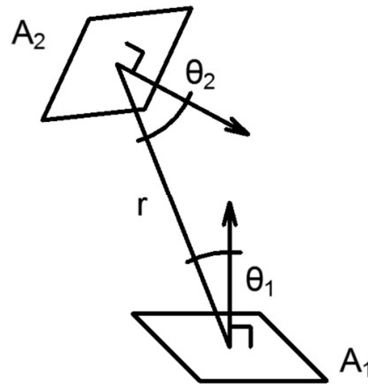
4.1.5 Testek közötti sugárzásos hőcsere



$$\varepsilon = \alpha$$



$$q_{rad} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} \sigma (T_1^4 - T_2^4)$$

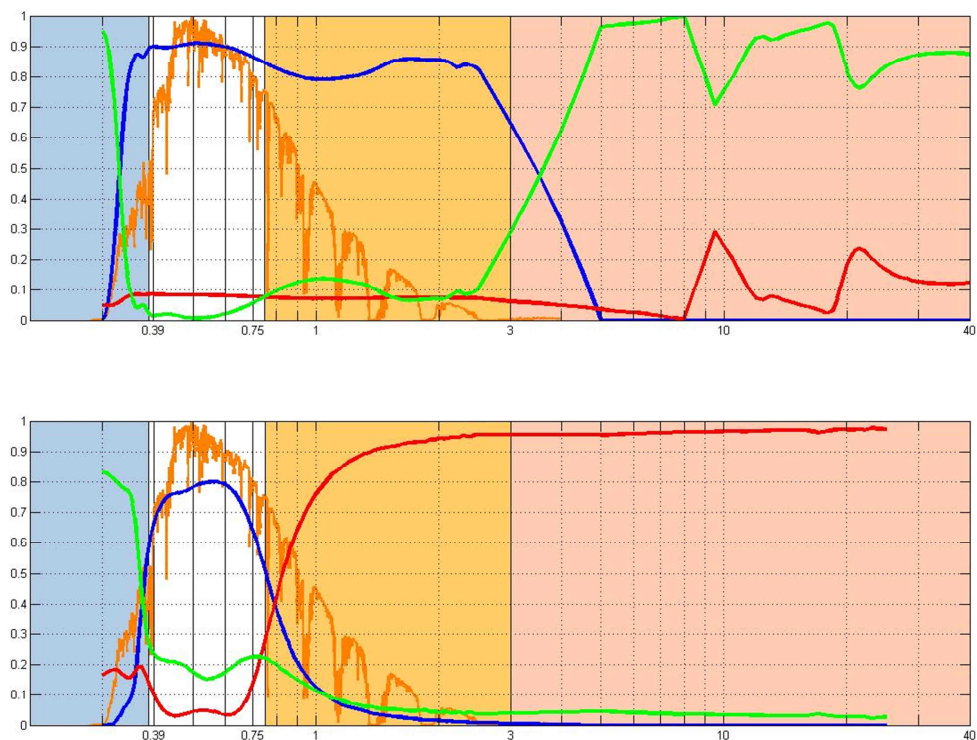


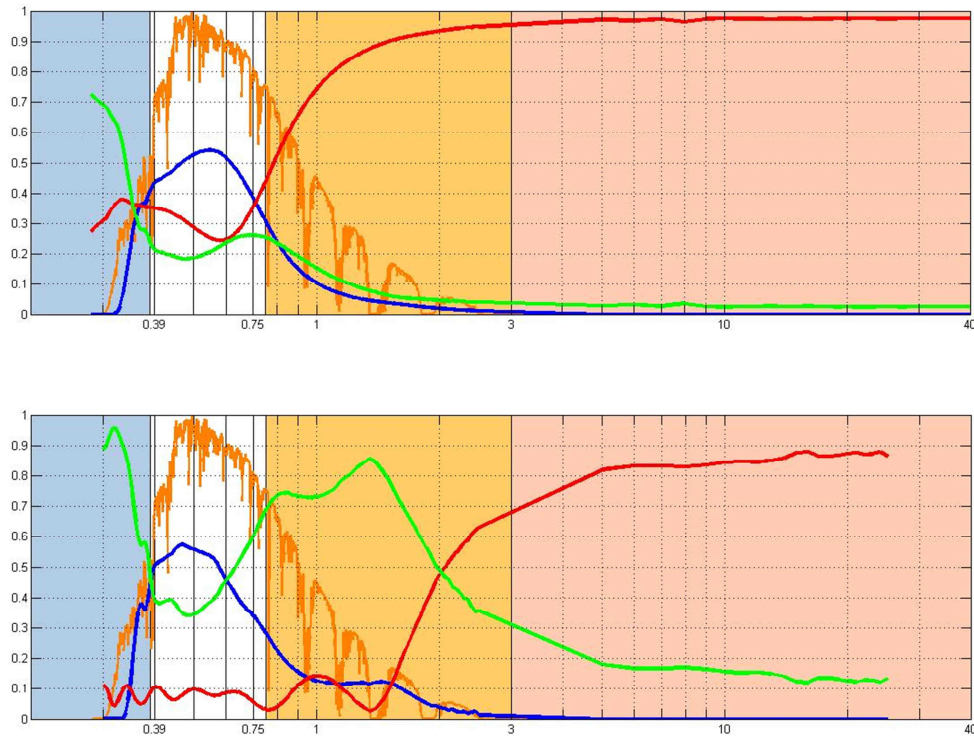
$$F_{1-2} = \frac{1}{A_1} \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{\pi r^2} dA_2 dA_1$$

$$F_{i-j} = F_{j-i}$$

$$T_{MR} = \sum_{i=1}^n F_i T_i^4$$

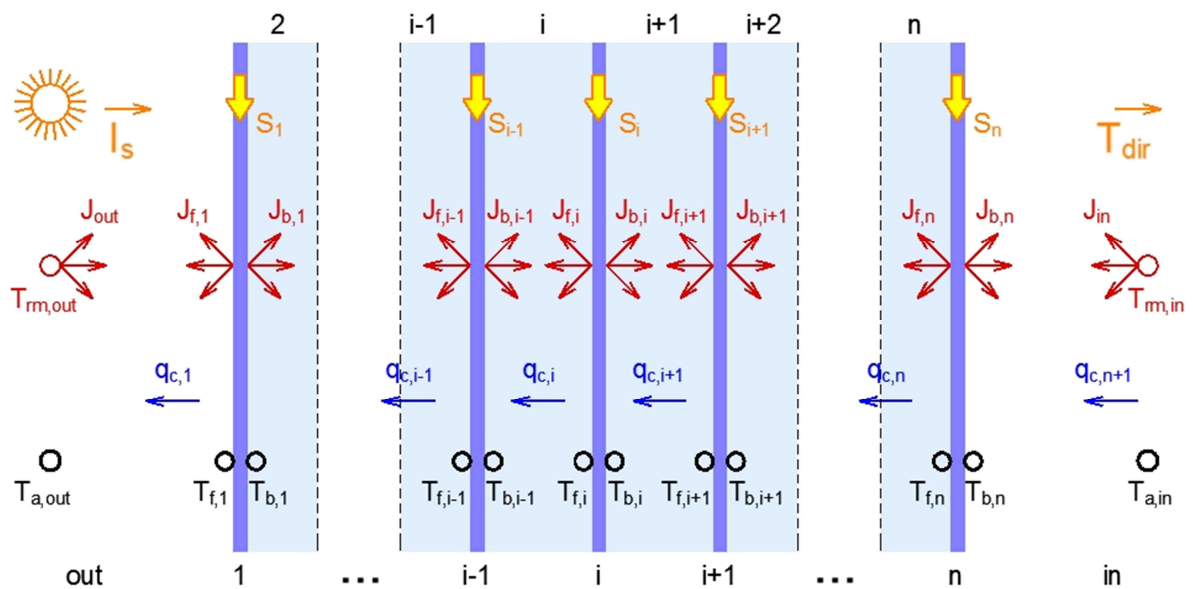
4.1.6 Építési üvegek sugárzástechnikai jellemzői





4.2 A konvektív hőátadás alapismeretek

4.3 Réteges üvegszerkezetek energiamérlege



5 Transzparens szerkezetek hőtechnikai modellezése 2 – árnyékolók és gyakorlat



6 Transzparens szerkezetek hőtechnikai modellezése 3 – egész ablakszerkezetek hőtechnikai paramétereinek számítása



7 Instacioner hővezetés – elmélet, numerikus módszerek alapjai



8 Instacioner hővezetés – gyakorlat



9 Véges térfogat módszer alapjai, Matlab alapok



10 HAM modellezés – elméleti alapok 1



11 HAM modellezés – elméleti alapok 2



12 HAM modellezés – gyakorlat 1



13 HAM modellezés – gyakorlat 1



14 Kitekintés: épület szintű modellek



15 Melléklet

15.1 Matematikai jelölések

$y(x)$

$y'(x)$

$y''(x)$

$$\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2}$$

$$\dot{Q} = \frac{dQ}{dt}$$

$$u(x, y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}$$

$$\underline{a}$$

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_x & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_y & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_z \end{pmatrix}$$

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

15.2 Deriválás

Azt a függvényt, mely az (a, b) intervallum minden pontjához egy adott f függvény azon pontbeli deriváltját rendeli hozzá, az f függvény derivált függvényének nevezzük.

$$y'(x) = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{y(x+dx) - y(x)}{dx}$$

15.3 Dimenzióanalízis

Egyszerű példa: porlasztó. Egy D átmérőjű csövön keresztül érkezik egy folyadék a porlasztóba ahol kis d átmérőjű cseppecskékké porlasztódik. Ha kísérletekkel kell felállítanunk valamilyen összefüggést a kis d mérethez, akkor milyen változókkal kellene dolgoznunk:

- D – a cső átmérője
- d – a cseppecskék átmérője
- v – a folyadék sebessége a csőben
- μ – a folyadék viszkozitása
- ρ – a folyadék sűrűsége
- σ – a folyadék felületi feszültsége

Ez így összesen 6 változó. Ha d -re fel akarunk írni egy függvényt:

$$d = f(D, v, \mu, \rho, \sigma)$$

Akkor egy ötváltozós függvényt kapunk. Ez nem túl szerencsés. Ha kísérleti úton fel akarjuk állítani ezt az összefüggést, akkor az körülbelül az életünk végéig tartana (túl sok változó). Kezelhető számú változóra van szükségünk. De hogyan határozhatunk meg ilyeneket, milyenek legyenek? Dimenzió nélküli változókra van szükségünk.

Írjuk fel a változóink alap dimenzióit. Az alap dimenzióink a következők:

L hossz [m]

M tömeg [kg]

t idő [s]

T hőmérséklet [K]

Ezek alapján:

$$d \doteq L$$

$$D \doteq L$$

$$v \doteq L \cdot t^{-1}$$

$$\mu \doteq M \cdot L^{-1} \cdot t^{-1}$$

$$\rho \doteq M \cdot L^{-3}$$

$$\sigma \doteq M \cdot t^{-2}$$

Összesen 6 paraméterünk van: $k=6$

Ezek a paraméterek összesen 3 alap dimenzióval írhatóak fel: $n=3$

A Buckingham π elmélet alapján összesen $k-n$, azaz jelen esetben $6-3=3$ független dimenziótlan csoportot tudunk felírni:

$$\Pi_1 = f(\Pi_2, \Pi_3)$$

Lépések:

1. összes független paraméter felsorolása, összesen k db
2. paraméterek felbontása alap dimenziók szerint, ezekben összesen n db dimenzió szerepel
3. a szükséges dimenzió nélküli számok számának meghatározása a Buckingham π elmélet segítségével:
 $k-n$
4. ismétlődő paraméterek meghatározása, összesen n darabra van szükség, a kiválasztás szabályai:
 - a. a függő változó nem lehet köztük (esetünkben d)
 - b. mindegyik érintett alap dimenzióknak szerepelnie kell
 - c. dimenzióilag függetlennek kell lenniük, azaz
 - i. egyik sem állítható elő a többi kombinációjából
 - ii. és ne lehessen dimenziótalan csoportot alkotni belőlük

A példában a kiválasztott referencia paraméterek:

$$D \doteq L$$

$$\nu \doteq L \cdot t^{-1}$$

$$\mu \doteq M \cdot L^{-1} \cdot t^{-1}$$

Minden követelményt teljesítenek

5. Π -k meghatározása. Ehhez az ismétlődő változókat megszorozom a maradék nem ismétlődő változóval

$$\Pi_1 = D^a \cdot \nu^b \cdot \mu^c \cdot d$$

$$\Pi_2 = D^d \cdot \nu^e \cdot \mu^f \cdot \rho$$

$$\Pi_3 = D^g \cdot \nu^h \cdot \mu^i \cdot \sigma$$

Azaz:

$$\Pi_1 = (L)^a \cdot \left(\frac{L}{t}\right)^b \cdot \left(\frac{M}{L \cdot t}\right)^c \cdot L$$

$$\Pi_2 = (L)^d \cdot \left(\frac{L}{t}\right)^e \cdot \left(\frac{M}{L \cdot t}\right)^f \cdot \frac{M}{L^3}$$

$$\Pi_3 = (L)^g \cdot \left(\frac{L}{t}\right)^h \cdot \left(\frac{M}{L \cdot t}\right)^i \cdot \frac{M}{t^2}$$

Mivel dimenzió nélküli csoportokat kell kapjunk felírhatjuk Π_1 -re:

$$\Pi_1 = (L)^a \cdot \left(\frac{L}{t}\right)^b \cdot \left(\frac{M}{L \cdot t}\right)^c \cdot L = 0$$

$$L\text{-re: } 0 = a + b - c + 1$$

$$\text{M-re: } 0 = c$$

$$\text{t-re: } 0 = -b - c$$

Ennek a lineáris egyenletrendszernek a megoldása: $a=-1$ $b=0$, $c=0$, tehát:

$$\Pi_1 = (L)^{-1} \cdot L = 0$$

$$\text{azaz: } \Pi_1 = \frac{d}{D}$$

Π_2 -re felírva ugyanez:

$$\Pi_2 = (L)^d \cdot \left(\frac{L}{t}\right)^e \cdot \left(\frac{M}{L \cdot t}\right)^f \cdot \frac{M}{L^3}$$

$$\text{L-re: } 0 = d + e - f - 3$$

$$\text{M-re: } 0 = f + 1$$

$$\text{t-re: } 0 = -e - f$$

Ennek a lineáris egyenletrendszernek a megoldása: $d=1$ $e=1$, $f=-1$, tehát:

$$\Pi_2 = L \cdot \frac{L}{t} \cdot \frac{1}{\frac{M}{L \cdot t}} \cdot \frac{M}{L^3}$$

azaz:

$$\Pi_2 = \frac{\rho v D}{\mu} = \text{Re}$$

Ami pont megegyezik a Reynolds számmal

Végezetül Π_3 -ra is felírva:

$$\Pi_3 = (L)^g \cdot \left(\frac{L}{t}\right)^h \cdot \left(\frac{M}{L \cdot t}\right)^i \cdot \frac{M}{t^2} = 0$$

$$\text{L-re: } 0 = g + h - i$$

$$\text{M-re: } 0 = i + 1$$

$$\text{t-re: } 0 = -g - h - 2$$

Ennek a lineáris egyenletrendszernek a megoldása: $g=0$ $h=-1$, $i=-1$, tehát:

$$\Pi_3 = 1 \cdot \frac{1}{L} \cdot \frac{1}{\frac{M}{L \cdot t}} \cdot \frac{M}{t^2} = 0$$

azaz:

$$\Pi_3 = \frac{\sigma}{\mu v}$$

Tehát végül az eredeti összefüggésünk, amikor d -t 5 paraméter függvényeként próbáltuk felírni a következő formára egyszerűsödött:

$$\frac{d}{D} = f\left(\text{Re}, \frac{\sigma}{\mu\nu}\right)$$

15.4 Programok

LBNL Window - <http://windows.lbl.gov/software/window/window.html>

LBNL Therm - http://windows.lbl.gov/software/therm/7/t7_download7_2_9.asp

LBNL Optics - http://windows.lbl.gov/software/Optics/6/o6_download.asp