00 - instacioner hővezetés

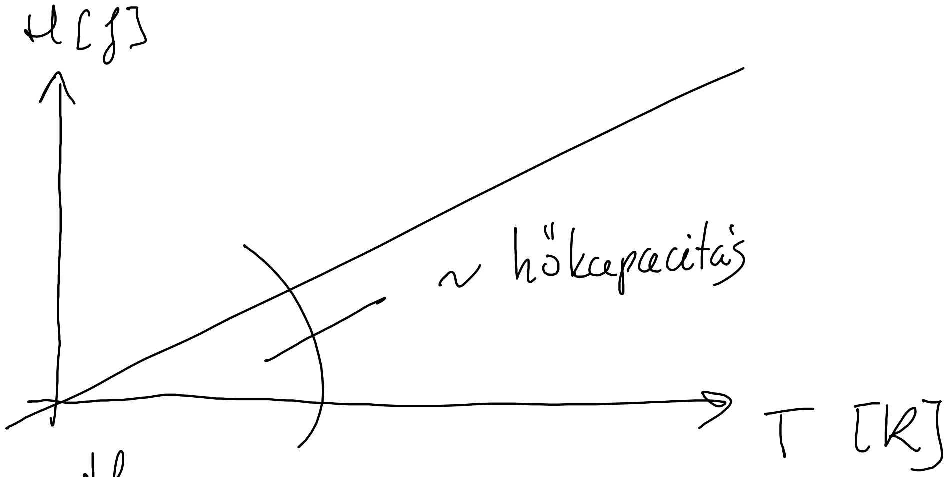
2018. október 11.
13:53

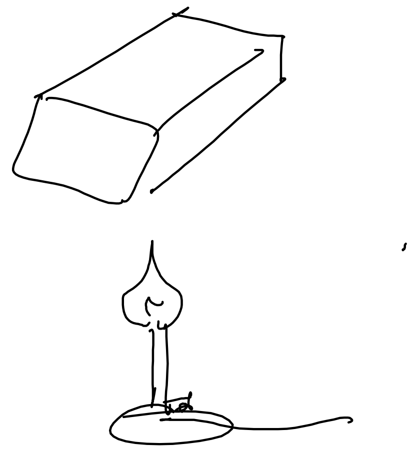
∅

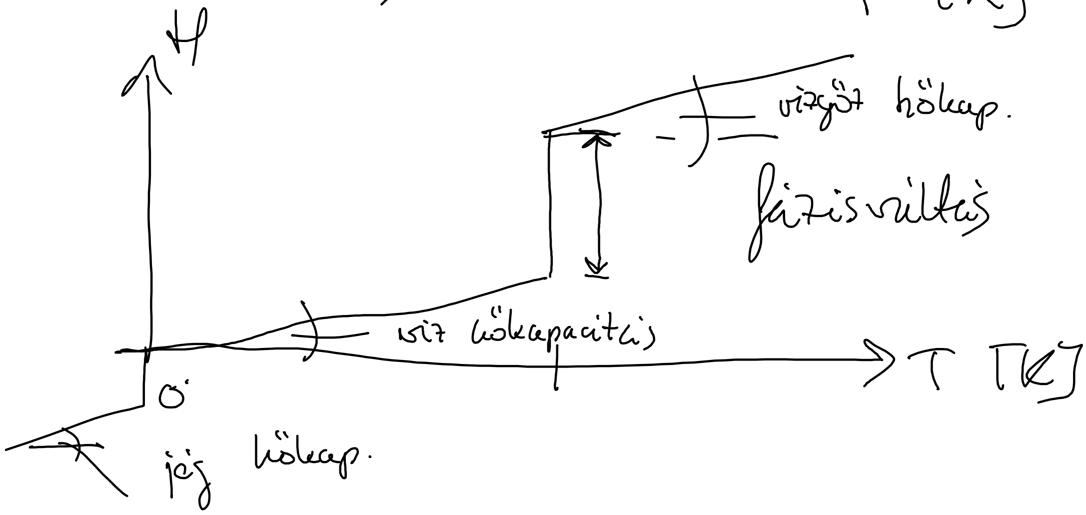
extenzív mennyiség időbeli megváltozása egy elemi térfogatban	=	extenzív mennyiség vezetéses ki- és beáramlásának előjeles összege az elemi térfogatban	+	~~extenzív mennyiség forrása az elemi térfogatban~~	+	~~extenzív mennyiség konvektív ki- és beáramlásának előjeles összege az elemi térfogatban~~

mennyiség: H - entalpia = termod. rendszer teljes energiája $[J]$

fajlagos entalpia $h = \frac{H}{V}$ $\left[\frac{J}{m^3}\right]$







hőkapacitás: $C = \frac{\partial H}{\partial T}$ $\left[\frac{J}{K}\right]$ $\frac{\partial h}{\partial T}$ $\left[\frac{J}{m^3 K}\right]$

fajhő: $c_p = \left.\frac{\partial H}{m \partial T}\right|_{p=áll}$ $\left[\frac{J}{kg K}\right]$ hőtágulás

$c_V = \left.\frac{\partial H}{m \partial T}\right|_{V=áll.}$ $\left[\frac{J}{kg K}\right]$

$$\Rightarrow \quad c_V = \frac{\partial H}{m\,\partial T}\bigg|_{V=\text{áll.}} \quad \left[\frac{J}{kgK}\right]$$

szilárd anyag: $c_p = c_V$

$$C = \rho \cdot c_p = \frac{kg}{m^3} \cdot \frac{J}{kgK} = \frac{J}{m^3K} = \frac{\partial h}{\partial T}$$

---

stacioner hővezetés egyenlete: 1D

$$\underbrace{\phi = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x}\right)}_{\frac{1}{m}\ \frac{W}{m\cancel{K}}\ \frac{\cancel{K}}{m}\ \to\ \frac{W}{m^3}}$$

fajlagos entalpia: energiatartalom / elemi térfogat

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \underbrace{\frac{\partial(\rho \cdot c_p \cdot T)}{\partial t}}_{\frac{\cancel{kg}}{m^3}\ \frac{J}{\cancel{kg}\cancel{K}}\ K/s\ \to\ J/m^3s\ =\ \frac{W}{m^3}} = \boxed{\rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x}\right)}$$

időbeli megv.
→ t-szerinti parciális derivált

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z}\right)$$

ha λ = áll.

$$\rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \lambda_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad \Big/\ \rho \cdot c_p$$

$$\rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \lambda_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad / \rho \cdot c_p$$

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}$$

$$a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_p}$$ ← hőfokvezetési tényező v. termikus diffuzivitás

$$\frac{W/mK}{\frac{kg}{m^3} \frac{J}{kgK}} = [m^2/s]$$

$$\frac{K}{s} = \cancel{\frac{m^2}{s}} \cancel{\frac{K}{m^2}}$$

	ρ $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$	c_p $\left[\frac{J}{kgK}\right]$	C $\left[\frac{J}{m^3K}\right]$	λ $\left[\frac{W}{mK}\right]$	a $[m^2/s]$
levegő	1,2	1006	1203,6	0,024	$1{,}99e^{-5}$
víz	1000	4185,5	$4{,}1855e^{6}$	0,58	$1{,}38e^{-7}$
acél	7850	465	$3{,}65e^{6}$	50	$1{,}37e^{-5}$ ←
üveg	2100	880	$1{,}92e^{6}$	1	$5{,}208e^{-7}$ ←
beton	2200	880	$1{,}85e^{6}$	1.6-2	$8.96e^{-7}$ ←
kőzetgy.	50	880	$4e^{6}$	0.04	$1.6e^{-6}$
fa	550	1700	$9{,}35e^{5}$	0.13	$1.4e^{-7}$

2018. október 12.
12:46

stacioner alapséma:

$$\phi = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \cong \lambda \frac{T(x-dx) - 2T(x) + T(x+dx)}{dx^2} = \lambda \frac{T(i+1) - 2T(i) - T(i-1)}{dx^2}$$

instacioner tag

$$\rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \cong \rho \cdot c_p \cdot \frac{T_i^{j+1} - T_i^{j}}{dt}$$

j-edik időlépés

i-edik pont

$$\Downarrow$$

$$\rho \cdot c_p \cdot \frac{T_i^{j+1} - T_i^{j}}{dt} = f\left(\lambda_x \frac{T_{i+1}^{j+1} - 2T_i^{j+1} + T_{i-1}^{j+1}}{dx^2}\right) + (1-f)\left(\cancel{\lambda_x \frac{T_{i+1}^{j} - 2T_i^{j} + T_{i-1}^{j}}{dx^2}}\right)$$

1. $f = 0$ teljesen explicit séma

$$\rho \cdot c_p \cdot \frac{T_i^{j+1} - T_i^{j}}{dt} = \lambda_x \frac{T_{i-1}^{j} - 2T_i^{j} + T_{i+1}^{j}}{dx^2} \qquad / : \rho \cdot c_p$$

$$\frac{T_i^{j+1} - T_i^{j}}{dt} = a \frac{T_{i-1}^{j} - 2T_i^{j} + T_{i+1}^{j}}{dx^2}$$

$$T_i^{j+1} = \frac{a\,dt}{dx^2} \left(T_{i-1}^{j}\right) + \left(1 - \frac{2a\,dt}{dx^2}\right) T_i^{j} + \frac{a\,dt}{dx^2} \left(T_{i+1}^{j}\right)$$

ismeretlen

ismert hőmérsékletek

ismeretlen

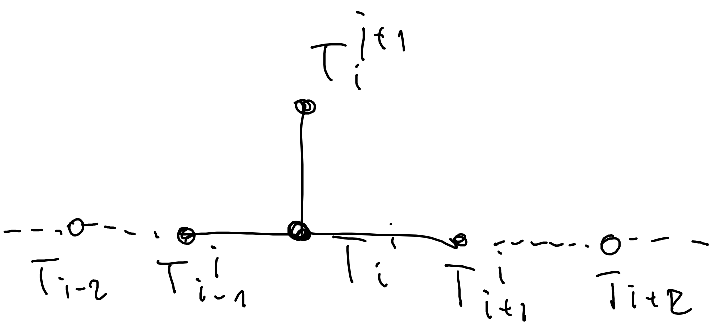
ismert hőmérsékletek

$$
\begin{array}{c}
 \\ i
\end{array}
\begin{bmatrix}
\ddots & & & \\
& \dfrac{a\Delta t}{dx^2} & 1-\dfrac{2a\Delta t}{dx^2} & \dfrac{a\Delta t}{dx^2} \\
& i-1 & i & i+1 \quad \ddots
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\vdots \\ T_{i-1}^{j} \\ T_i^{j} \\ T_{i+1}^{j}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\vdots \\ T_{i-1}^{j+1} \\ T_i^{j+1} \\ T_{i+1}^{j+1} \\ \vdots
\end{bmatrix}
$$

$$\underline{\underline{K}} \cdot \underline{T}^{j} = \underline{T}^{j+1}$$

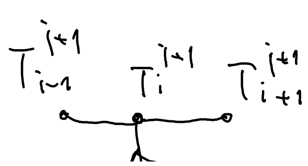
stabilitási kritérium

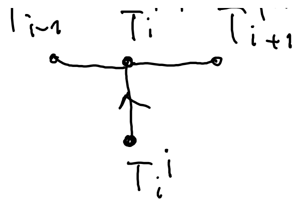
$$\boxed{\frac{a \cdot \Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}}$$



$f = 1 \rightarrow$ teljesen implicit séma

$$\boxed{\rho \cdot c_p \cdot \frac{T_i^{j+1} - T_i^{j}}{dt} = \lambda_x \frac{T_{i-1}^{j+1} - 2T_i^{j+1} + T_{i+1}^{j+1}}{dx^2}}$$





átrendezés után:

$$-\frac{a\Delta t}{dx^2} T_{i+1}^{j+1} + \left(2\frac{a\Delta t}{dx^2}+1\right) T_i^{j+1} - \frac{a\Delta t}{dx^2} T_{i-1}^{j+1} = T_i^j$$

ismert

ismeretlen

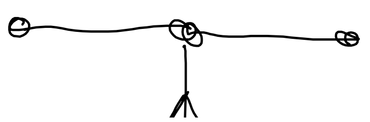
$$\underline{\underline{K}}\,\underline{T}^{i+1} = \underline{T}^{i}$$

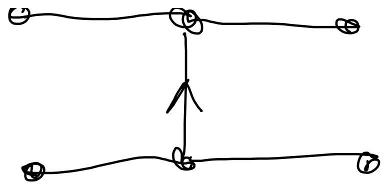
ismeretlenek vektora

$$\rightarrow \underline{T}^{i+1} = \underline{\underline{K}} \backslash \underline{T}^{i}$$

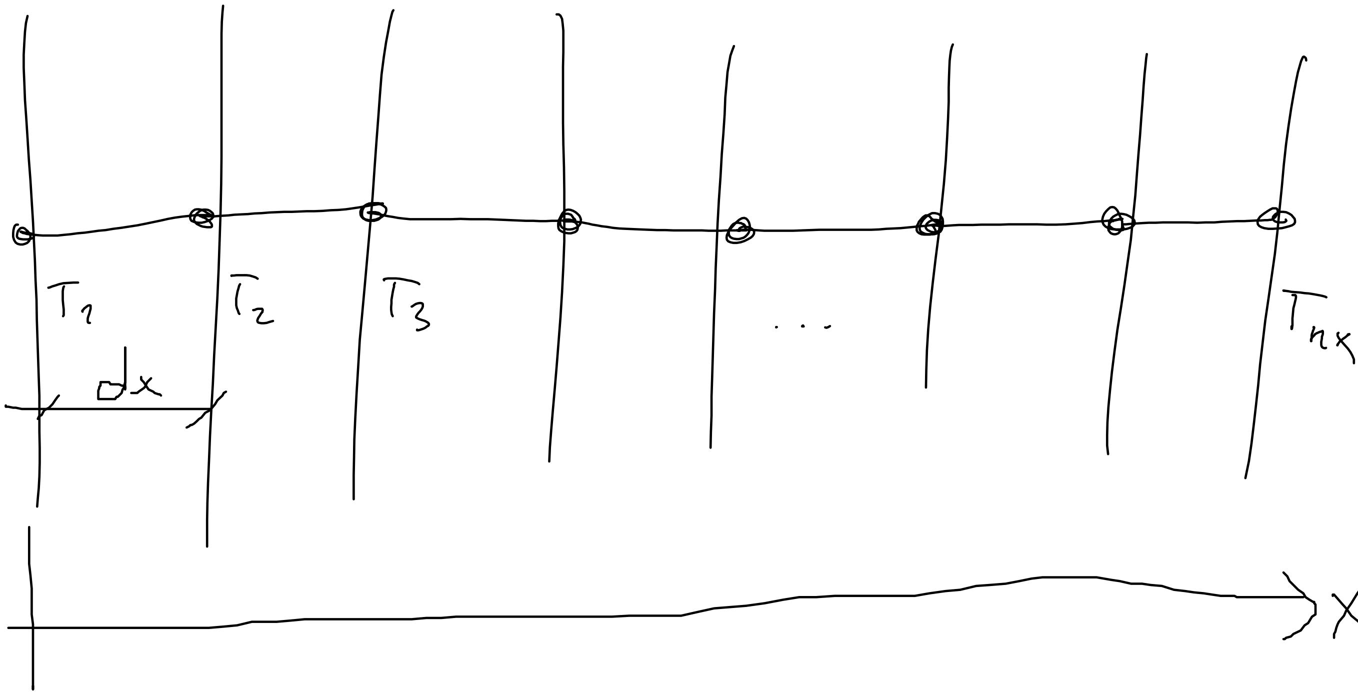
határtalanul stabil

$f = 0{,}5$ Crank-Nicolson séma





2018. október 12.
13:22



2018. október 12.
13:52

$\underline{\underline{K}} \cdot T^{i} = T^{i+1}$

1.

1, $T_1^{i+1} = T_E^{i}$

⋮

n, $T_n^{i+1} = T_I^{i}$