00 - Ismétlés

2016. szeptember 13.

T skalártér $T(x,y,z,\cancel{t})$

$$\nabla T = \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)}_{\text{vektor}} \cdot \underbrace{T(x,y,z)}_{\text{skalár}} =$$

$$= \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}\right)$$

$$\underline{q} = -\lambda \nabla T = \left(-\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x}, -\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y}, -\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z}\right)$$

ha $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z$

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}\right)$$

Divergencia = a vektortér kifelé mutató többlet áramának egy térfogati egységére vetített értéke

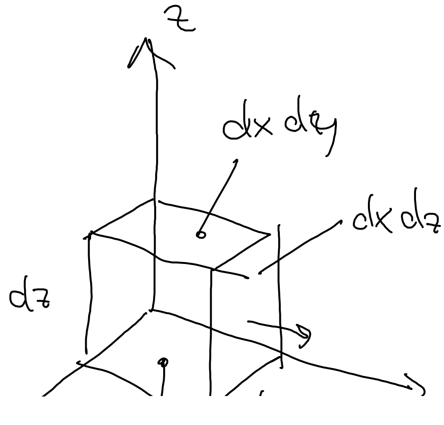
$$\operatorname{div} \underline{q} = \nabla \cdot \underline{q} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}}_{\text{skalár}}$$

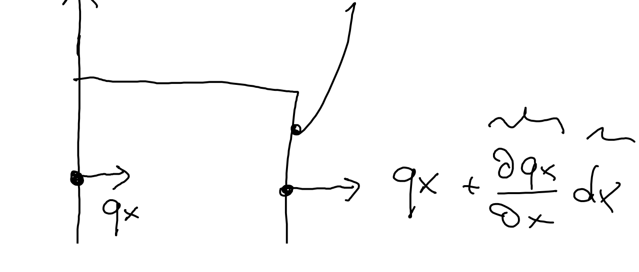
tulajdonságai:

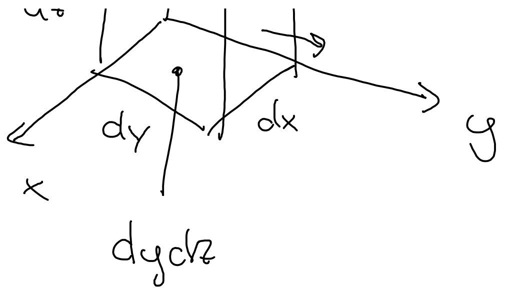
- $+$ előjel $\rightarrow$ többlet kiáramlás
- $-$ előjel $\rightarrow$ többlet beáramlás
- 0 $\rightarrow$ ki = be

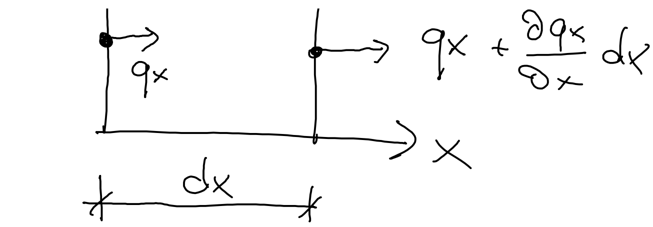
$$\underset{T}{\text{skalártér}} \xrightarrow{\text{grad}} \underset{\underline{q}}{\text{vektortér}} \xrightarrow{\text{div}} \text{skalártér}$$

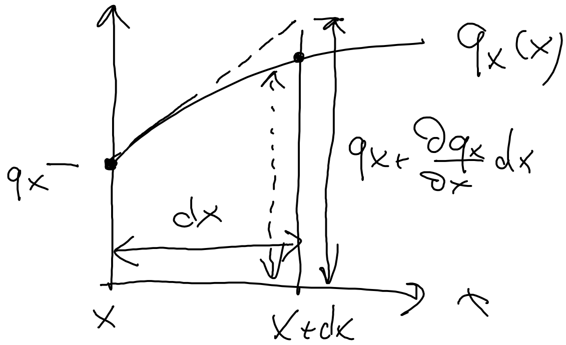


x-irány









$$\left[\left(\cancel{q_x} + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx\right) - \cancel{q_x}\right] dy\,dz + \left[\left(\cancel{q_y} + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy\right) - \cancel{q_y}\right] dx\,dz + \left[\left(\cancel{q_z} + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz\right) - \cancel{q_z}\right] dx\,dy =$$

$$= \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) \overbrace{dx\,dy\,dz}^{\text{kiemeltem}} = \operatorname{div} q \, dV$$

02 - Stacioner Hővezetés

2016. szeptember 16.
8:19

~~extenzív mennyiség időbeli megváltozása egy elemi térfogatban~~ = extenzív mennyiség vezetéses ki- és beáramlásának előjeles összege az elemi térfogatban + ~~extenzív mennyiség forrása az elemi térfogatban~~ + ~~extenzív mennyiség konvektív ki- és beáramlásának előjeles összege az elemi térfogatban~~

0

$$-\operatorname{div} \underline{q} = 0$$

$$-\operatorname{div}(-\lambda \operatorname{grad} T) = 0$$

$$-\operatorname{div} \cdot \begin{bmatrix} -\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \\ -\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \\ -\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \begin{bmatrix} -\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \\ -\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \\ -\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \end{bmatrix} =$$

$$\boxed{= \lambda_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \lambda_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0}$$

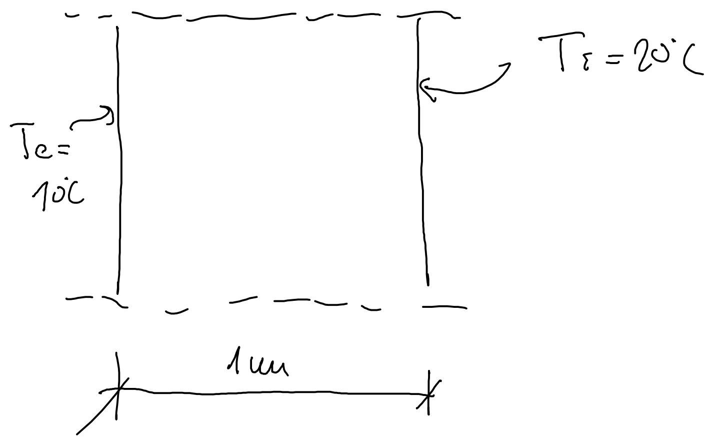
$$\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z$$

$$\rightarrow \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = \lambda \Delta T$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0}$$

03 - Hőfokesési görbe, U érték számítás

2016. szeptember 16.
8:22



$\lambda = 1 \left[\frac{W}{mK}\right]$

$T(x) = ?$

$T(x) = ax + b$ ← általános megoldás

$T(x=0) = 10°C$ $\quad a \cdot 0 + b = 10 \rightarrow b = 10$

$T(x=1) = 20°C$ $\quad a \cdot 1 + 10 = 20 \rightarrow a = 10$

$\rightarrow \boxed{T(x) = 10 \cdot x + 10}$

04 - Analtikus vs. numerikus megoldás

2016. szeptember 16.
8:28

$$\lambda_x \frac{\partial^2 T}{\partial x} = 0$$

diff. egyenlet

analitikus megoldás = $ax+b$ ← általános

$\boxed{10x+10}$ ← specifikus

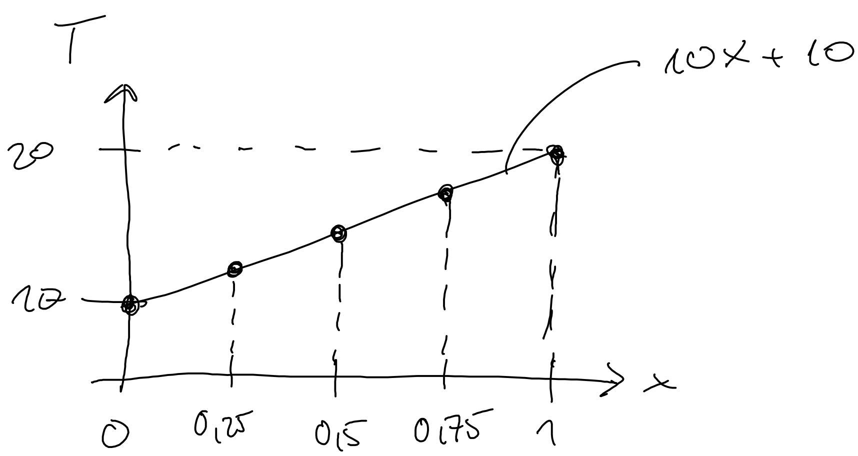
analitikus: zárt képlet szerint

bármilyen x-et behelyettesíthetek

→ ∞ pontban ismert a megoldás

∞ pontossággal

$\boxed{\text{Numerikus megoldás}}$



X	0	0,25	0,5	0,75	1
y(T)	10	12^5	15	17^5	20

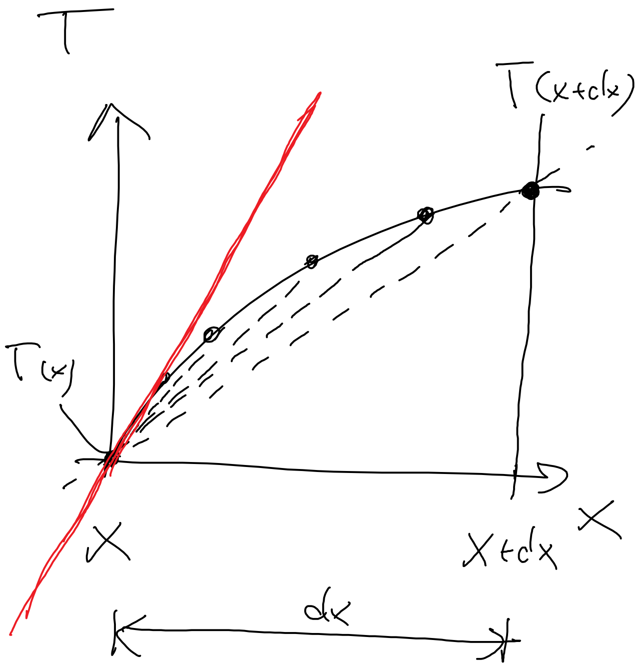
$9.99998' \quad 121^{50001} \; \ldots$

- diszkrét pontokban
- valamekkora leírás (numerikus leírás)
- 2 pont között nincs információ $\rightarrow$ interpolálunk

02 - véges differencia

2016. szeptember 23.
12:59

$$\underbrace{\lim_{dx \to 0} \underbrace{\boxed{\frac{T(x+dx)-T(x)}{dx}}}_{\text{differenciahányados}}}_{\text{differenciálhányados}}$$



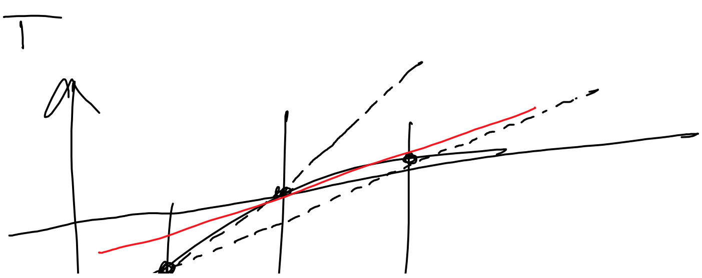
→ véges differencia sémák

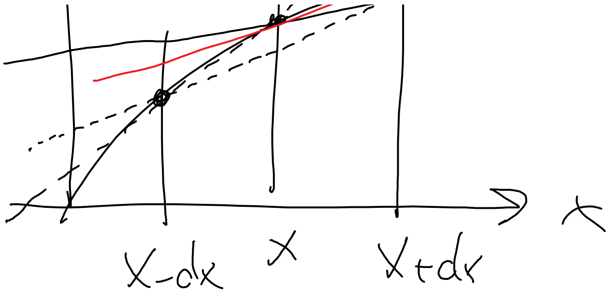
1. rendű sémák

$$\frac{\partial T}{\partial x} \cong \frac{T(x+dx)-T(x)}{dx}$$ haladó - differencia (forward difference)

$$\frac{\partial T}{\partial x} \cong \frac{T(x)-T(x-dx)}{dx}$$ retrográd - differencia (backward difference)

$$\frac{\partial T}{\partial x} \cong \frac{T(x+dx)-T(x-dx)}{2dx}$$ centrális - differencia (central difference)

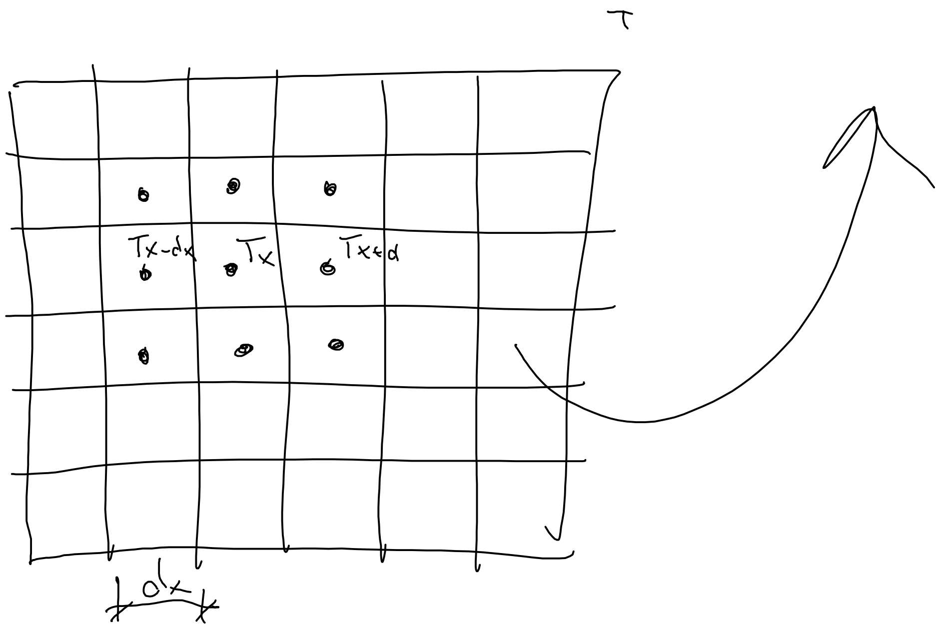




2. rendű séma

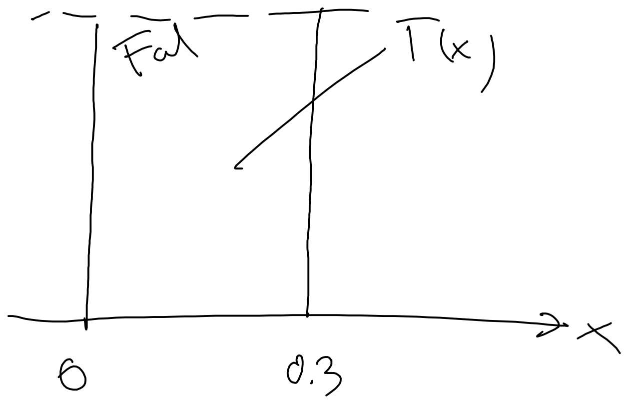
$$\boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \cong} \; \frac{T'(x) - T'(x-dx)}{dx} = \frac{\frac{T(x+d)-T(x)}{dx} - \frac{T(x)-T(x-dx)}{dx}}{dx} =$$

$$\boxed{= \frac{T(x+dx) - 2T(x) + T(x-dx)}{dx^2}}$$



03 - egy konkrét példa

2016. szeptember 23.
13:13

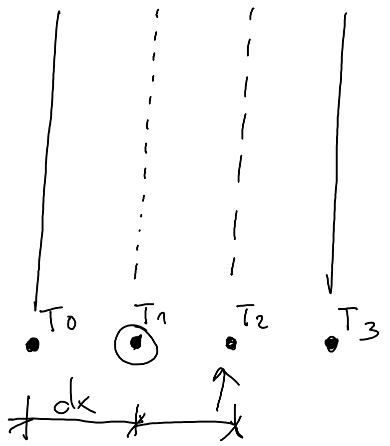


$T(x=0) = 10\,[^\circ C]$

$T(x=0.3) = 20\,[^\circ C]$

$$\lambda_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

1. felosztom véges pici elemekre ~ $\boxed{\text{hálózás}}$ $\boxed{\text{diszkretizáció}}$



$\lambda_x = 1 \left[\frac{W}{mK}\right]$

$dx = 0.1$

2. a kontinuum helyett a numerikus háló egyes pontjaira írunk fel egyenleteket

parciális differenciálegyenlet ↝ véges differencia egyenletek

$$\boxed{\begin{aligned}
&T_0 = 10\\
T_1:\quad \lambda_x\, &\frac{T_2 - 2T_1 + \overset{10}{T_0}}{dx^2} = \frac{\lambda_x}{dx^2}T_0 - 2\frac{\lambda_x}{dx^2}T_1 + \frac{\lambda_x}{dx^2}T_2 = 0\\
T_2:\quad &\frac{T_3 - 2T_2 + T_1}{dx^2} = \frac{\lambda_x}{dx^2}T_3 - \frac{2\lambda_x}{dx^2}T_2 + \frac{\lambda_x}{dx^2}T_1 = 0\\
&T_3 = 20 \qquad \text{konstans}
\end{aligned}}$$

4 egyenlet

4 ismeretlen

4 ismeretlenes lineáris egyenletrendszer

$= 0$

$$\boxed{\begin{aligned} -\frac{\lambda_x}{dx^2} T_1 + \frac{\lambda_x}{dx^2} T_2 &= -\frac{\lambda_x}{dx^2} 10 \\ \frac{\lambda_x}{dx^2} T_1 - 2\frac{\lambda_x}{dx^2} T_2 &= -\frac{\lambda_x}{dx^2} 20 \end{aligned}}$$

2 ismeretlenes lineáris egyenletrendszer

$$\begin{vmatrix} -2\frac{\lambda_x}{dx^2} & \frac{\lambda_x}{dx^2} \\ \frac{\lambda_x}{dx^2} & -2\frac{\lambda_x}{dx^2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} T_1 \\ T_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{\lambda_x}{dx^2} 10 \\ -\frac{\lambda_x}{dx^2} 20 \end{vmatrix}$$

$$K \cdot \underline{T} = \underline{b}$$

$T_1 = \ldots \quad 10 + 3.333$

$T_2 = \ldots. \quad 10 + 6,666$